Кокотов Юрий Абрамович.
Доктор химических наук
Санкт-Петербург.

СООТВЕТСТВИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВ. МЕЖАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ СООТВЕТСТВИЯ.

Kokotov Yuri Abramovich.
Doctor of Chemical Sciences.
St. Petersburg.

CORRRESPONDENCE OF REAL AND COMPLEX SPACES.INTER ALGEBRAIC CORRESPONDENCE OPERATIONS.

Abstract. Algebra of complex numbers can by treated as specific algebra of complex binomials with algorithm of multiplication forming new complex binomial. Real and complex binomials ("numbers") may by representing in various ways through relative quantities in numerical or functional form and then merged into monomials. The interalgebraic operations of correspondence, concern to set theory, is determined the correspondences between real and complex binomials as well between real and imaginary monomials. The points of the real and complex planes, defined by the two real numbers forming real and complex binomials, are in direct correspondence detrminating by inter algebraical operation of "direct correspondence". The "cross correspondence" is other interalgebraic operation carried out through « raising to the imaginary degree". That operation establish correspondences between real hyperbolic and complex trigonometric binomials, as well as between real trigonometric and complex hyperbolic binomial, and realised either through binomials themselves, or through monomials (exponential or trigonometric). Was considered correspondences between exponentials (real and imaginary) and power functions (real and imaginary) as well as between real and imaginary power functions. Given examples of concret correspondences detween the real and complex numerical binomials. The widely discussed Euler formula combined four fundamental numbers of mathematics was analized. It was demonstrated what througth correspondences of real and imaginary elementary "quartic functions"

(the elements of "quartic" sets) may by established correspondences of different real and complex functions. Interdependences between binomials concerned to the same set, established through operations with binomials concerned to another set, should be considered as complex operations of inter-algebraic correspondence.

1.Введение. Предварительные сведения.

Изучение комплексных чисел обычно начинают с аксиоматического изложения их алгебры- определения чисел и правил действий с ними. При этом обычно не отмечаются следующие существенные обстоятельства (см., однако, [1]):

1.Комплексное число $A+Bi$ следует рассматривать, как **комплексный алгебраический бином (двучлен,пару чисел),** образуемый числами с разными особенностями или их символами (буквами).

2.Произведение и частное таких биномов (многочлен или рациональная дробь) всегда делится на две части, образующие **новый комплексный бином**.

3. Составляющие комплексного бинома **интерпретируются** геометрически как прямоугольные координаты точки комплексной плоскости с координатами *(x;iy).* Таким образом, алгебра комплексных чисел оказывается **специфической алгеброй биномов.**

Сказанное справедливо и для комплексных чисел иного вида (двойных и дуальных) [2] с иными особыми числами (операторами умножения).

4.Биномы, образуемые вещественными и комплексными числами , могут интерпретироваться как прямоугольные координаты *(x,y),(x,iy)* точек вещественной и комплексной плоскостей**.**

5.Вещественное и комплексное **биномиальные пространства** соответственны. Соответствие осуществляется **меж алгебраическими операциями соответствия**,относящимися к теории множеств.

Биномы и в вещественном, и в комплексном пространствах могут быть **разными способами** представлены в **приведенной форме,** через взаимосвязанные **относительные** величины и **положительный** (абсолютное число) модуль. Относительным величинам может быть придан смысл двух взаимосвязанных функций от общего аргумента х,образующих **функциональный бином**. Приведенные функции» определяются как геометрически, так и аналитически (разложениями в ряд по аргументу х)[3].

Далее рассматриваются только два варианта приведенных форм вещественных и комплексных функциональных биномов:

Тригонометрический вариант:

Исходный бином представляется в виде произведения положительного модуля

$$r = \left|\sqrt{A^2 + B^2}\right| \tag{1}$$

на тригонометрический бином,образованный двумя сопряженными тригонометрическими функциями- косинусом и синусом:

$$\begin{aligned} A+B &= r\left[cos\left(x\right)+sin\left(x\right)\right] \\ A+iB &= r\left[cos\left(x\right)+i\,sin\left(x\right)\right] \end{aligned} \qquad (2)$$

Гиперболический вариант:

Здесь исходный бином рассматривается как разность *A-B*, представленная через произведение гиперболического модуля на гиперболический бином, образованный гиперболическими косинусом и синусом:

$$\begin{aligned} A-B &= \mu(\cosh(x)+\ \sinh(x)); \\ A-Bi &= \mu(\cosh(x)-i\sinh(x)); \end{aligned} \qquad (3)$$

Гиперболический модуль μ, определяется как

$$\mu = +\sqrt{\left|A^2-B^2\right|} \equiv +\sqrt{\left|A^2+(Bi)^2\right|} \quad (4)$$

Соотношение между модулями определяется формулой:

$$\mu = r\sqrt{(1-2\sin^2(x))} \qquad (5)$$

Тригонометрический вариант приведения биномов широко используется в теории комплексной переменной.

Вещественные и комплексные **приведенные биномы** с модулем, равным единице, назовем **элементарными.**

Модуль бинома может быть увеличен или уменьшен в любое число раз, что соответствует умножению исходного бинома на **положительное число.** Это фактически определяет взаимную независимость модуля и элементарного бинома.

Элементарные биномы могут быть «свернуты» в **одночлен** с прежним аргументом,т.е. представлены в виде одной функции. Назовем эту операцию **редуцированием.**

2.Результаты.

1.Прямое соответствие алгебраических биномов различных пространств. Операция прямого алгебраического соответствия.

Точки двух двумерных пространств (вещественного и комплексного) определяемые одной и той же парой вещественных чисел, следует считать соответственными друг другу.

Действия, определяющие переход от точки одного пространства к соответственной точке другого, назовем **операциями соответствия.**

Их следует рассматривать как самостоятельные **вне алгебраические** или **между алгебраические** операции **изменения алгебры**. Они относятся к теории множеств и сам термин «соответствие» принадлежит этой теории.

Далее обозначаем их специальными символами □ и $\succ\!\prec$, употребляемым вместо знака равенства.Мы сознательно не используем далее других терминов и обозначений теории множеств, поскольку в ней обычно рассматриваются **внутри алгебраические** операции, **не меняющие алгебры**.

Очевидно, что вещественному алгебраическому биному *A+B (или X+У)* всегда соответствует комплексный бином

A+Bi (или X+Уi)

Перейти от одного вида биномов к другому, можно прибавив или отняв **переходный комплексный бином** B(i-1) или Y(i-1):

$$\begin{aligned} A+B \;\square\;\; A+iB \\ A\text{-}B \;\square\;\; A+iB \end{aligned} \qquad (6)$$

Этой операции эквивалентна следующая:

$\dfrac{Bi}{i} \;\square\;\; B$ (7) Назовем их операциями **прямого соответствия** вещественных и комплексных биномов («комплексных чисел») разных пространств

2. Прямое соответствие функциональных биномов вещественного и комплексного пространств. Тригонометрические и гиперболические, биномы.

Из элементарных геометрических соображений мы можем записать следующие «тригонометрические» уравнения соответствия

$$1)\,\frac{(i\sin x)_C}{i} \;\square\;\; (\sin x)_R;\quad 2)\,(\cos x)_C \;\square\;\; (\cos x)_R \qquad (8)$$

первое из которых фактически эквивалентно соотношению (7). Вещественным **элементарным тригонометрическим биномам** (с аргументом *x***)** соответствуют (находятся в прямом соответствии) комплексные тригонометрические биномы:

$$\begin{aligned} \cos x+\sin x+(i-1)\sin x \;\square\;\; \cos x+i\sin x \\ \cos x-\sin x-(i-1)\sin x \;\square\;\; \cos x-i\sin x \end{aligned} \qquad (9)$$

Аналогична операция для вещественных гиперболических биномов:

$$\begin{aligned} &\cosh(x)+\sinh(x)+(i-1)\sinh(x)\square \quad \cosh(x)+i\sinh(x) \\ &\cosh(x)-\sinh(x)-(i-1)\sinh(x)\square \quad \cosh(x)-i\sinh(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Левые части этих уравнений –вещественные элементарные функциональные биномы (тригонометрические и гиперболические). Правые части –аналогичные комплексные биномы. Модули соответственных биномов при прямой операции не меняются.

Вещественные тригонометрические биномы редуцируются **тригонометрическими одночленами**:

$$\begin{aligned} &\cos(x)+\sin(x)=\mathrm{cps}(x) \\ &\cos(x)\text{-}\sin(x)=\mathrm{cms}(x) \end{aligned} \tag{11}$$

Вещественные **одночлены** $\mathrm{cps}(x)$ и $\mathrm{cms}(x)$ полезно рассматривать как самостоятельные функции, рассчитываемые по значениям составляющих, или по формулам

$$\begin{aligned} &\mathrm{cps}(x)=\sqrt{2}\ \cos(\frac{\pi}{4}\text{-}x) \\ &\mathrm{cms}(x)=\sqrt{2}\ \sin(\frac{\pi}{4}\text{-}x) \end{aligned} \tag{12}$$

Комплексные элементарные тригонометрические биномы сводятся (по Эйлеру) в одночлен (редуцируются) мнимой экспонентой:

$$\begin{aligned} &\cos x+i\sin x=e^{ix} \\ &\cos x-i\sin x=e^{-ix} \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (9) в редуцированной форме принимает вид:

$$\begin{aligned} &\mathrm{cps}\,x+(i-1)\sin x\square \quad e^{ix} \\ &\mathrm{cms}\,x-(i-1)\sin x\square \quad e^{-ix} \end{aligned} \tag{14}$$

Эта формула сопоставляет одночлены двух пространств и образована только периодическими функциями.

Биномы в редуцированной форме становятся двух символьными одночленами -произведениями модуля на функциональный одночлен.

3. **Операция сопряжения.**

В алгебре комплексных чисел особое место уделяется сопряженным комплексным биномам («числам»). Умножение комплексного числа (бинома) на сопряженное с ним комплексное число, результатом которого оказывается квадрат модуля- **т.е. вещественное число,** можно считать **операцией сопряжения**. Она используется в математике и физике для перехода от полученного в результате тех или иных операций комплексного числа к вещественному, «имеющему смысл».

В квантовой физике вещественному квадрату модуля дается вероятностная трактовка. Он рассматривается как «плотность вероятности» функции распределения, характеризующей локализацию частицы-волны в вещественном пространстве.

Модуль (длина радиуса вектора точки)-лишь одна из двух полярных координат соответственных друг-другу точек вещественной и комплексной плоскостей. Вторая координата (угол) при этой операции остается неопределенной.

реимущество операции прямого соответствия точек обоих пространств по сравнению с операцией сопряжения очевидно.

4. Возведение бинома и одночлена в мнимую степень (перекрестное соответствие).

Формальное возведение в мнимую степень i вещественной экспоненты, (редуцирующей вещественный гиперболический бином) вводит в алгебру комплексных чисел мнимые экспоненты

$$(e^x)^i=e^{ix};(e^{-x})^i=e^{-ix}$$

Обычно эти соотношения записываются именно как равенства, что существенно затемняет их смысл. Здесь и далее мы их записываем их через специальный символ $\rightarrowtail\!\!\!\!\prec$,означаюший перекрестное соответствие:

$$(e^x)^i \rightarrowtail\!\!\!\!\prec e^{ix};(e^{-x})^i \rightarrowtail\!\!\!\!\prec e^{-ix} \tag{15}$$

Можно понять, что возведение в мнимую степень i -это также **«меж алгебраическая операция».** Действительно, в алгебре вещественных чисел нет числа i, и эта операция не имеет алгебраического смысла. Это переход от вещественного пространства к комплексному, т.е. операция соответствия, однако,теперь осуществленная **через одночлен**.

Обратный переход от комплексного пространства к вещественному следует описывать как извлечение корня мнимой степени из комплексных одночлена и бинома.

Мнимая экспонента вводится в математику интуитивно и формально- как возведение вещественной функции в мнимую степень. Неоднократно отмечалось, что, несмотря на многие аналогии свойств вещественных и мнимых экспонент, формула Эйлера (возведение вещественной экспоненты в мнимую степень) **вводится** (т.е. постулируется), а не доказывается [4],а, следовательно, и смысл этой операции не ясен. Однако,ее трактовка как **вне алгебраической** операции соответствия точек вещественной и комплексной плоскостей оказывается естественной.

Уравнения (15) могут быть записаны через вещественные и мнимые элементарные **гиперболические биномы,** редуцируемые экспонентами:

$$\begin{aligned}[\cosh(x)+\sinh(x)]^i &\succ\!\!\prec \cos(x)+i\sin(x)\\ [\cosh(x)-\sinh(x)]^i &\succ\!\!\prec \cos(x)-i\sin(x)\end{aligned} \quad (16)$$

Эта формула определяет **перекрестное соответствие** вещественных гиперболических и комплексных тригонометрических биномов.

Пока только аналогии (доказательство приведем далее) можно возвести в мнимую степень вещественные тригонометрические биномы, а также и вещественный тригонометрический одночлен:

$$\begin{aligned}\{[\cos(x)+\sin(x)]^i\} &\succ\!\!\prec \{[\cos(ix)]+[\sin(ix)]=\cosh(x)+i\sinh(x)\}\\ \{[\cos(x)-\sin(x)]^i\} &\succ\!\!\prec \{[\cos(ix)]-[\sin(ix)]=\cosh(x)-i\sinh(x)\}\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{cps}(x)]^i &\succ\!\!\prec \mathrm{cps}(ix)\\ [\mathrm{cms}(x)]^i &\succ\!\!\prec \mathrm{cms}(ix)\end{aligned} \quad (18)$$

Эти формулы устанавливают перекрестные соответствия вещественного и комплексного функциональных биномов, а также вещественного и комплексного одночленов. Правая часть уравнения (18) может быть представлена в виде бинома («развернута»):

$$\begin{aligned}[\mathrm{cps}(x)]^i &\succ\!\!\prec \{\cosh(x)+i\sinh(x)\}\\ [\mathrm{cms}(x)]^i &\succ\!\!\prec \{\cosh(x)-i\sinh(x)\}\end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что уравнение (18) (возведение вещественного тригонометрического одночлена в мнимую степень) –некий аналог формулы Эйлера для экспонент. Мнимый гиперболический бином редуцируется

Оно определяет **функциональное соответствие** вещественных тригонометрических и комплексных гиперболических биномов.

Таким образом в теории функций комплексной переменной возникают **комплексные гиперболические** элементарные биномы**.**

Операция возведения вещественных функциональных биномов или их одночленов в мнимую степень устанавливает перекрестное **соответствие функциональных биномов**:

1) непериодических вещественных гиперболических биномов с периодическими комплексными тригонометрическими биномами.

2) периодических вещественных тригонометрических биномов с непериодическими гиперболическими комплексными биномами.

Можно понять, что при этом **непериодические функции** должны рассматриваться и записываться как **многозначные.**

Вполне очевидно,что изменение вида функций при переходе между соответственными друг -другу точками разных пространств влечет за собой и изменение модуля:

$$\begin{aligned}[r\times\mathrm{cps}(x)]^i &\succ\!\!\prec \mu\{\cosh(x)+i\sinh(x)\}\\ [r\times\mathrm{cms}(x)]^i &\succ\!\!\prec \mu\{\cosh(x)-i\sinh(x)\}\end{aligned} \quad (20)$$

Это изменение также можно записать в виде операции перекрестного соответствия- возведения тригонометрического модуля в мнимую степень: f

$$+\sqrt{(A^2+B^2)^i} \succ\prec +\sqrt{\left|(A^2+(iB)^2)\right|} = +\sqrt{\left|A^2-B^2\right|}; \tag{22}$$

Очевидно,что эта операция теряет смысл при A=B.

Геометрически это означает, что все соответсвенные точки вещественной и комплексной областей,за исключением точек на диагоналях углов координат (асимптот гипербол), могут рассматриваться одновременно и как точка некой окружности $X^2+Y^2=r^2$ =const с центром в начале координат, и как точка одной из четырех равнобочных гипербол $X^2 - Y^2 = \mu^2$, с вершинами,отстоящими от начала координат на одно и то же ближайшее расстояние μ^0.

Элементарные вещественные гиперболические биномы редуцируются вещественными экспонентами:

$$\begin{gathered}[\cosh(x)+\sinh(x)] = e^{x} \\ [\cosh(x)-\sinh(x)] = e^{-x}\end{gathered} \tag{23}$$

Элементарные комплексные гиперболические биномы редуцируются мнимыми экспонентами:

$$\begin{gathered}[\cosh(ix)]+[\sinh(ix)] = e^{ix} \\ [\cosh(ix)]-[\sinh(ix)] = e^{-ix}\end{gathered} \tag{24}$$

Переход от вещественных биномов A+B к комплексным A+Bi можно записать как перекрестное соответствие:

$$\begin{gathered}[\mu(\cosh(x)+\sinh(x))]^{\frac{1}{i}} \succ\prec r[\cos(x)+i\sin(x)]; \\ [\mu(\cosh(x)-\sinh(x))]^{\frac{1}{i}} \succ\prec r[\cos(x)-i\sin(x)];\end{gathered} \tag{25}$$

Приведем примеры перекрестных соответствий между некоторыми конкретными биномами («числами») вещественного и комплексного пространств,придав им численные значения:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\langle(\cosh\frac{\pi}{100}+\sinh\frac{\pi}{100})^i = (1.004..+0.031..)^i\right\rangle_R \succ\prec \\
&\succ\prec \left\langle(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = 0.999..+i0.031..)\right\rangle_C; \\
&\left\langle(\cosh\frac{\pi}{8}+\sinh\frac{\pi}{8})^i = (1.078..+0.402..)^i\right\rangle_R \succ\prec \\
&\succ\prec \left\langle(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = 0.923..+i0.382..)\right\rangle_C; \\
&\left\langle(\cosh\frac{\pi}{4}+\sinh\frac{\pi}{4})^i = (1.324..+0.868..)^i\right\rangle_R \succ\prec \\
&\succ\prec \left\langle(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = 0.707..+i0.707..)\right\rangle_C
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

а далее и

$$\left.\begin{array}{l}
\left\langle [(\cosh(\frac{\pi}{2})+\sinh(\frac{\pi}{2})]^{i}=(2.509..+2.301..)^{i}\right\rangle_{R} \succ\prec \\
\succ\prec \left\langle \cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})=0+i\right\rangle_{C}; \\
\left\langle [(\cosh(\pi)+\sinh(\pi)]^{i}=(11.591..+11.548..)^{i}\right\rangle_{R} \succ\prec \\
\succ\prec \left\langle \cos(\pi)+i\sin(\pi)\,)=\ -1+0\right\rangle_{C}; \\
\left\langle [\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})]^{i}=(55.663..+55.654)^{i}]\right\rangle_{R} \succ\prec \\
\succ\prec \left\langle \cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))=(0-i)\right\rangle_{C}; \\
\left\langle\ [\cosh(2\pi)\ +\sinh(2\pi)]^{i}=\left(267.746..+267.444..\right)^{i}\right\rangle_{R} \succ\prec \\
\succ\prec \left\langle \cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=\ (1+0)\right\rangle_{C}
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

Правая часть ур.(27) представляет в форме комплексного бинома хорошо известные выражения для первых четырех степеней числа *i*. Те же результаты получаются в результате другой операции- прямого соответствия элементарных вещественных и комплексных числовых биномов:

$$\begin{array}{l}
1)\left(0+1\right)_{R} \ \square \quad (0+i)_{C}; \quad 2)(-1+0)_{R} \ \square \quad (-1+0)_{C}; \\
3)(0-1)_{R} \ \square \quad (0-i)_{C}; \quad 4)(1+0)_{R} \ \square \quad (1+0)_{C};
\end{array} \qquad (28)$$

5.Степенные функции и другие формы соответствия между множествами.

Множество натуральных логарифмов положительных (арифметических) чисел $X=\ln|x|$ удобно рассматривать как **вещественное множество**, происходящее от множества **арифметических чисел** $|x|$**.** В нем с необходимостью возникают отрицательные числа. Отсюда же возникают и множества **мнимых логарифмов арифметических чисел**, $iX=i\ln|x|, iY=i\ln|y|$ и **комплексное множество логарифмов,** $X+iY$. Хорошо известно логарифмическое тождество, связывающее два положительных числа *l* и *t*, а далее и переменную *x* с числом t

$$t^{\log_t l}=l; \quad t^{\log_t |x|}=|x| \qquad (29)$$

Оно подразумевает последовательное выполнение двух противоположных действий (логарифмирование и потенцирование) с числом *l* или с переменной *x*, естественно не меняющее ни число, ни переменную.Основание логарифма *t*-произвольное арифметическое число. Отсюда следует логарифмическое тождество для натуральных логарифмов:

$$e^{p\ln|x|}=|x|^{p}; \quad e^{-p\ln|x|}=|x|^{-p}; \qquad (30)$$

Существенно, что в этих уравнениях нами уже произведен **произвольный выбор** числа *e* как **основания логарифма.** Это тождество может быть записано для логарифмического множества с переменной $X=\ln|x|$:

$$e^{pX}=|x|^{p}; \quad e^{-pX}=|x|^{-p}; \qquad (31)$$

Его мжно записать и через гиперболические биномы с логарифмическим аргументом:

$$\cosh(pX)\pm\sinh(pX)=e^{\pm pX}=|x|^{\pm p}; \qquad (32)$$

Эти биномы редуцируются не только «логарифмической» экспонентой, но и степенной функцей от **арифметического аргумента** $|x|$ От мнимых логарифмов iX также образуются гиперболические биномы, которые также редуцируются («сводятся в одночлен») двумя **эквивалентными** способами:

$$\cosh(ipX) \pm \sinh(ipX) = e^{\pm piX} = |x|^{\pm pi} \tag{33}$$

- экспонентой с логарифмическим аргументом X и степенной функцией, но уже с **арифметическим** аргументом $|x|$. Таким образом, существуют перекрестное соответствие вещественных и комплексных гиперболических биномов с логарифмическим аргументом:

$$[\cosh(pX) \pm \sinh(pX)]^i \succ\!\prec [\cosh(piX) \pm \sinh(piX)] \tag{34}$$

а далее и перекрестные соответствия:

$$\left\langle \cosh(pX) \pm \sinh(pX) = e^{\pm pX} = |x|^{\pm p} \right\rangle_R^i \succ\!\prec \left\langle \begin{matrix} = \cosh(ipX) \pm \sinh(ipX) = e^{\pm ipX} = \\ = \cos(pX) \pm i\sin(pX)] = |x|^{\pm pi} \end{matrix} \right\rangle_C$$

т.е. следующие:

$$1)\left\{\left\langle e^{\pm pX}\right\rangle_R\right\}^i \succ\!\prec \left\langle e^{\pm ipX}\right\rangle_C - \text{двух экспонент с вещественным}$$

и мнимым логарифмическими аргументами.

$$2)\left\{\left\langle e^{\pm pX}\right\rangle_R\right\}^i \succ\!\prec \left\langle (|x|^{\pm p})^i\right\rangle_C - \text{ экспоненты с вещественным}$$

логарифмическим аргументом и вещественной степенной функцией (с обычным, т.е. не логарифмическим, аргументом). (35)

$$3)\ \left\{\left\langle x^{\pm p}\right\rangle_R\right\}^i \succ\!\prec \left\langle e^{\pm ipX}\right\rangle_C - \text{ вещественной степенной функции}$$

и экспоненты с мнимым логарифмическим аргументом.

$$4)\left\{\left\langle x^{\pm p}\right\rangle_R\right\}^i \succ\!\prec \left\langle |x|^{\pm pi}\right\rangle_C - \text{ степенных функций с вещественным}$$

и мнимым аргументами.

Таким образом, возведение степенных функций с арифметическим аргументом в мнимую степень-еще один вариант перекрестного **соответствия вещественных и мнимых одночленов.**

Операции с вещественными степенными функциями в вещественном пространстве и операции со степенными функциями с мнимыми показателями степени в комплексном пространстве также просты, как и операции с экспонентами (вещественными и мнимыми).

Однако, в отличие от экспоненты степенная функция не может быть непосредственно представлена в виде бинома, т.е. разбита на сумму двух других степенных функций от общего аргумента. Это разбиение может быть осуществлено только косвенно-через обратный переход к экспоненте.

Заметим, однако, степенная функция всегда может быть разбита на сомножители, от каждого из которых можно перейти к его «собственной» экспоненте. Тогда в виде бинома может быть представлен логарифм степенной функции.

Резюмируя сказанное, мы можем записать и следующее соответствие между переменными двух различных множеств (арифметического и мнимых логарифмов):

$$|x|^i \succ\!\prec iX = i\ln|x|; \tag{36}$$

Это уравнение определяет операцию возведения арифметической переменной в мнимую степень именно как между алгебраическую **операцию соответствия.** Возникает также и соответствие , аналогичное соотношению (11):

$$(e^X)^i \succ\prec e^{iX} \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} e^X &= \cosh(X) \pm \sinh(X) = \cosh(\ln|x|) \pm \sinh(\ln|x|); \\ e^{iX} &= \cos(X) \pm i\sin(X) = \cosh(i\ln|x|) \pm \sinh(i\ln|x|); \end{aligned} \tag{38}$$

Все соотношения (1)-(21) распространяются и на множество натуральных логарифмов арифметических чисел с переменной X.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры перекрестного соответствия чисел вещественной и комплексной плоскостей. Придав, например, «логарифмическому» аргументу X значение π/2, находим, соответствующее ему арифметическое число:

$$e^X = e^{\pi/2} = 4.81047738097 \tag{39}$$

Таким образом арифметическому числу 4.81047738097 соответствует число логарифмического множества π/2 .Придав арифметической переменной, *x,* численное значение $x = 4.81047738097$ получаем конкретное **соответствие двух чисел -одного, принадлежащего арифметическому множеству, и другого, принадлежащего множеству мнимых логарифмов арифметических чисел**:

$$(4.81047738097)_x^{\ i} \succ\prec (i\pi/2)_X\,,$$

С другой стороны арифметическому числу *x*=π =3.14 .. соответствует значение *X*=1.14472988585..

Возведение этого числа в мнимую степень может трактоваться и как переход к **комплексному логарифмическому биному:**

$$(\pi)_x^{\ i} \succ\prec e^{i1.14472988585} = \cos(1.14472988585) + i\sin(1.14472988585) = 0.413 + i0.9106$$

Теперь соответствия (27) могут быть записаны в степенной форме -через мнимую степень одного и того же арифметического числа:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \ (4.81047738097)_x^{\ i} \succ\prec \\ &\succ\prec [e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = (\,0+i)_C]_X\,; \\ &2)\ \ (4.81047738097)_x^{\ 2i} \succ\prec \\ &\succ\prec [(e^{\,i\pi}) = (\cos(\pi) + i\sin(\pi)\,) = \ (-1+0\,)_C]_X \\ &3)(4.81047738097)_x^{\ 3i} \succ\prec \\ &\succ\prec [(e^{\frac{3i\pi}{2}}) = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = (0-i)_C]_X \\ &4)\ \ (4.81047738097)_x^{\ 4i} \succ\prec \\ &\succ\prec [(e^{2i\pi}) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = \ (1+0)]_C]_X \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Возведение вещественной экспоненты в мнимую степень означает переход от арифметического множества к комплексному логарифмическому множеству. Аргумент тригонометрический функций, образующих мнимую экспоненту, относится именно к этму множеству.

Уравнение (40-2) было получено Эйлером в следующей форме:

$$e^{i\pi} = -1 \tag{41}$$

Оно объединяет и связывает четыре различные фундаментальные для математики числа,что и вызывает особое удивление [4,5]. Математические и физические материалы и даже художественный фильм по этой проблеме можно найти в Интернете.

Еще более удивительно, что через уравнение (41) выявляется необычная связь тех же фундаментальных чисел математики с физической постоянной тонкой структуры-безразмерной постоянной,определяемой важнейшими константами современной физики [6,7]. Смысл этой связи («физическая нумерология») непонятен ни физикам, ни математикам.

Уравнение (41) следует записывать и понимать как равенство, определяющее конкретную точку комплексной плоскости в двух формах-в в форме комплексного бинома и редуцирующего его одночлена:

$$(e^{i\pi})_C = (-1+0)_C \tag{42}$$

Уравнение (40-2) устанавливает и соответствие двух конкретных числовых биномов -арифметического гиперболического и комплексного тригонометрического:

$$\Big\langle (11.5919..+11.5487..) = (23.06.. = (e^{\pi})\Big\rangle^{i}_{\mathrm{Re}} \succ\prec \Big\langle (e^{i\pi}) = (-1+0)\Big\rangle_{C}$$

Такие соответствия могут быть установлены для всех биномов вещественного и комплексного пространств.

Уравнение (42) –это запись конкретного комплексного числа в двух формах -в редуцированной форме и в форме бинома, определяющего положение точки на комплексной плоскости.

В сязи с этим следует напомнить, что комплексная экспонента определяется только суммой степенного ряда» и не имеет (в отличие от вещественной экспоненты) другого алгебраического определения.

Таким образом мы рассмотрели следующие операции перекрестного соответствия конкретных чисел разных множеств разных пространств:

а) конкретных значений вещественного и комплексного биномов,

в) конкретных значений вещественной и мнимой экспонент,

с) значений вещественной и мнимой степеней конкретного арифметического числа.

Мнимые степени положительных (арифметических) чисел сводятся к конкретным комплексным биномам

6. Соответствие функций вещественного и комплексного квартовых множеств.

В работе [8] было замечено, что разложение вещественной экспоненты e^x в ряд разбивается на четыре вещественые же квартовые функции:

$$A(x)=\sum_0^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!};\quad B(x)=\sum_0^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!};\quad C(x)=\sum_0^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!};\quad D(x)=\sum_0^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}; \tag{43}$$

Они могут рассматриваться как самостоятельные «элементы», образующие два «квартовые множества» вещественных и комплексных функций, существенно более широкие, чем множества функций, производимых от самих экспонент. Каждый из этих элементов в вещественной плоскости изображается собственнной U-или S-образной кривой.

Вещественная и комплексная экспоненты принадлежат к квартовым множествам.

Сами вещественные квартовые функции и происходящие от них гиперболические функции, экспоненты и степенные функции с аргументом х, изменяющимся в интервале $(-\infty < x < +\infty)$, не являются периодическими. Но именно от них удивительным образом происходят периодические синусоиды и косинусоиды с периодом (2 π).

Квартовые «элементы» позволяют ввести многие известные и неизвестные вещественные и комплексные функции и легко устанавливать их соответствие. Полученные нами ранее формулы, связывающие элементы вещественного и комплексного пространств

$$A(ix)=A(x);\ B(ix)=iB(x);\ C(ix)=-C(x);\ D(ix)=-iD(x) \tag{44}$$

можно одновременно рассматривать и как операции прямого соответствия мнимых и вещественных чисел, а далее и функций мнимого и вещественного аргументов:

$$A(ix) \square\ A(x);\ B(ix) \square\ iB(x);\ C(ix) \square\ -C(x);\ D(ix) \square\ -iD(x). \tag{45}$$

Перекрестные соответствия тригонометрических и гиперболических функций (уравнение (17)) легко «расшифровываются» именно через квартовые функции:

$$\begin{aligned}\mathrm{cps}(x) &= [A(x)-C(x)]+[B(x)-D(x)]\\ \mathrm{cms}(x) &= [A(x)-C(x)]-[B(x)-D(x)]\end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cps}(ix) &= [A(x)+C(x)]+i[B(x)+D(x)]\\ \mathrm{cms}(ix) &= [A(x)+C(x)]-i[B(x)+D(x)]\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathrm{cps}(ix) &= \cosh(x)+i\sinh(x)\\ \mathrm{cms}(ix) &= \cosh(x)-i\sinh(x)\end{aligned} \quad (47)$$

и ранее введенное соотношение (17) доказано.

Межалгебрические операции, осуществляемые через прямые и перекрестные соответствия.

Конечно,соответствие точек вещественной и комплексной плоскостей всегда и в разных формах неявно подразумевается и используется при операциях с комплексными числами.

Проще всего это заметить в операциях с полярными координатами точки-ее модулем,углом φ и его тригонометрическими функциями.

Очевидно,что в них всегда неявно принимается и используется прямое соответствие (9).

Очевидно,что вследствие прямого соответствия точек вещественной и комплексной плоскостей установливается и прямое соответствие **геометрически совпадающих** (совпадающих при совмещении плоскостей) кривых и ограничиваемых ими плоских фигур.

Так, например, геометрически совпадают кривые элементарных тригонометрических биномов вещественной и комплексной плоскостей, выражаемые уравнениями правой и левой частей уравнений (9), а,следовательно,и определяемые ими геометрические фигуры- **косинусоиды.**

Однако, алгоритмы алгебраических операций в комплексной плоскости с комплексными числами и в вещественной плоскости с вещественными числами, а тем более с вещественными биномами различаются.

Отсюда в математике возникают комбинированные операции в «параллельных» вещественном или комплексном пространствах с неявным использованием операций соответствия для взаимных переходах между ними.

Можно провести преобразования биномов (пар чисел) в вещественной плоскости через операции с комплексными биномами , а также и преобразования комплексных биномов через операции с вещественными биномами (парами чисел), используя различные операции соответствия.

Естественно,что сказанное распространяется и на операции с функциями и функциональными биномами.

При этом устанавливаются и более сложные соответствия исходных и получаемых в результате проведенных операций геометрических кривых и плоских фигур.

По существу имено такие **сложные межалгебраические операции** в неявной форме широко используются в математике для получения «имеющих смысл результатов в вещественных числах».

Для того, чтобы обратить на это внимание теоретиков и практиков полезно им дать им общее название, например,**трансляции**.

Выводы

1)Алгебру комплексных чисел следует рассматривать как специфическую **алгебра комплексных биномов**, с алгоритмом умножения, преобразующим произведение биномов в новый бином.

2)Биномы (вещественные и комплексные) могут быть различными способами представлены через относительные величины в «приведенной» форме (в числовой , а таке в функциональной). а далее сведены в одночлен (редуцированы).

3)Между вещественными и комплексными биномами и между редуцирующими их вещественными и мнимыми одночленами существуют соответствия, определяемые **меж алгебраическими операциями соответствия**,относящимися к теории множеств.

4)Точки вещественной и комплексной плоскостей, определяемые одной и той же парой вещественных чисел,образующей вещественный и комплексный биномы, находятся в **прямом соответствии** друг с другом, устанавливаемом через **меж алгебраическую операцию прямого соответствия**.

5) Возведение в мнимую степень является **меж алгебраической операцией перекрестного соответствия**. Она устанавливае **перекрестные** соответствия вещественных гиперболических и тригонометрических комплексных биномов, а также вещественных тригонометрических и комплексных иперболических биномов.

Эти соответствия осуществляются как непосредственно через операции с самими биномами, так и опосредованно -через возведение в мнимую степень редуцирующих биномы одночленов: вещественной экспоненты (формула Эйлера) и вещественного тригонометрического одночлена.

7) Рассмотрены **соответствия** экспонент (с вещественными и мнимыми показателями степени) и степенных функций (с вещественными и мнимыми показателями степени), а также соответствия собственно степенных функций с вещественным и мнимым показателями степени.

8) Приведены примеры конкретных соответствий **числовых (и в том единичных) биномов вещественно**й и комплексной плоскостей.

9)Проанализирована известная и широко обсуждаемая формула Эйлера, «объединяющая» четыре фундаментальных числа математики.

10) Соответствия вещественных и мнимых элементарных квартовых функций («элементов» квартовых множеств) позволяют устанавливать соответствия широкого множества функций, принадлежащих к квартовым множествам.

11)**Соотношения** между биномами одного и того же множества ,устанавливаемые через операции с соответственными им биномами другого множества, следует считать сложными межалгебраическими **соответствиями**.

Литература.

1. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М.Наука.1986.117с.

2. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. Издат.физ.мат.лит.М.1963.192с.

3.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.т.2 Санкт-Петербург.1997г.

4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.Наука.1984.

5. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. Наука.1966.

6. А.К. Лоренц. Теоретическая и математическая физика.т.18, 3,427-428, 1974.

7. Википедия (интернет).Постоянная тонкой структуры.

8. Кокоtov Yu. A. Elementary quartic functions and Sets thay form.

Международный научно-исследовательский журнал. 2018, 3(69). p.18. Екатеринбург.

Lesnyh Yu.I.
doctor of physical and mathematical sciences,
professor of the department of physics,
Samara State Technical University,

MODEL OF NUMERICAL ANALYSIS OF RELAXATION OF RESIDUAL METAL STRESSES

Лесных Ю.И.
доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики,
Самарский государственный технический университет

МОДЕЛЬ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТАЛЛА

Summary: On the basis of experimental researches of "strain ageing" of the reinforced details at vibration action the model for a stress relief numerical analysis is offered. The method of transformations of a distribution function of residual stresses taking into account the equations of evolution of flaws in the conditions of exterior superficial vibrations is used. The method can be extended on other cases of change of voltages in details: origination and a stress relief at thermomechanical machining, origination of flaws for fatigue.

Аннотация: На основе экспериментальных исследований «старения» упрочненных деталей при виброакустическом воздействии предложена модель для численного анализа релаксации напряжений. Используется метод преобразований функции распределения остаточных напряжений с учетом уравнений эволюции дефектов в условиях внешних поверхностных вибраций. Метод можно обобщить на другие случаи изменения напряжений в деталях: возникновение и релаксация напряжений при термомеханической обработке, возникновение трещин вследствие усталости и т.п.

Key words: relaxation, hardening, residual stress, defects, thermomechanical treatment.

Ключевые слова: релаксация, упрочнение, остаточное напряжение, дефекты, термомеханическая обработка.

1. Экспериментальное и физическое обоснование модели

Виброакустическое воздействие на упрочненные детали вызывает перераспределение напряжений и понижает уровень их неоднородностей [1, 2]. При этом сохраняется наклеп поверхности детали; это дает определенные преимущества по сравнению с другими способами создания устойчивой формы – отжигом или статическими циклическими нагрузками. Использование резонансного поглощения энергии дает возможность контроля и управления процессом «старения».

Проведены лабораторные и производственные исследования виброакустического воздействия на снижение остаточных напряжений.

На рисунке 1 приведена схема промышленной установки, реализованной на заводе «Азотреммаш» г. Тольятти [3]