

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3:534.26

*Пешков Никита Юрьевич*  
аспирант,

*Россия, Тула, Тульский государственный университет.*

## РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ЭЛЛИПСОИДЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

*Peshkov Nikita Yurievich*  
Postgraduate

*Russia, Tula, Tula, Tula State University.*

## SOUND WAVES SCATTERING IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE BY AN ELLIPSOID WITH AN INHOMOGENEOUS COVER

**Аннотация.** Представлено решения задачи дифракции плоской, цилиндрической и сферической звуковых волн на упругом однородном эллипсоиде, на поверхность которого нанесено слоисто-неоднородное покрытие. Эллипсоид находится в цилиндрическом волноводе бесконечной длины, заполненном идеальной жидкостью. Боковые стенки волновода являются абсолютно жесткими или импедансными. Решение проводится на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Приведены результаты расчета диаграмм направленности рассеянного звукового поля, которые показывают влияние физических параметров эллипсоида и волновода на дифракцию звука.

**Abstract.** The solution of the diffraction problem for the plane, cylindrical and spherical sound waves on a homogeneous elastic ellipsoid, whose surface is covered by an inhomogeneous layer, is presented. The ellipsoid is located in a cylindrical waveguide of infinite length filled with an ideal fluid. The waveguide's side walls are hard or impedance. The solution is realized at the base of the linear theory of elasticity and the model of propagation of the small vibrations in an ideal fluid using the finite element method (FEM). The results of calculation of the directivity patterns of the scattered sound field, which show the influence of the physical parameters of the ellipsoid and waveguide at sound diffraction, are presented.

*Ключевые слова:* однородный упругий эллипсоид, неоднородный упругий слой, цилиндрический волновод, рассеянное поле, потенциал смещений, импеданс, излучающая граница, метод конечных элементов, датчик, диаграмма рассеяния

*Key words:* homogeneous elastic ellipsoid, inhomogeneous elastic layer, cylindrical waveguide, scattered field, displacement potential, impedance, radiating boundary, finite element method, sensor, scattering pattern

### Введение

Решение задачи дифракции звуковых волн на упругом теле существенно зависит от формы тела и свойств его материала. Полученное решение задачи дифракции может быть использовано для идентификации параметров упругого тела. Такие решения могут быть использованы при разработке методов исследования в ультразвуковой диагностике, дефектоскопии и гидроакустике.

Исследование дифракции звуковых волн на упругих эллипсоидальных телах представляет значительный интерес. Эллипсоидальной геометрией охватывается большое многообразие форм. Многие реальные объекты хорошо аппроксимируются телами упомянутой формы. Дифракция акустических волн на упругих однородных сфероидах изучалась в ряде работ, например, [1-6]. В [7] рассматривался упругий неоднородный сфероидальный рассеиватель.

Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Дифракция звуковых волн на цилиндрических, сферических и сфероидальных

упругих однородных телах с непрерывно-неоднородными покрытиями, находящихся в безграничном пространстве, исследовалась в [8-14].

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов (МКЭ) [15-17], который уже много лет с успехом применяется в решении различных практических задач гидродинамики и теории упругости. В монографии [17] подробно изложены различные аспекты использования МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими.

В данной работе представлено решение задачи дифракции плоской, цилиндрической и сферической акустических волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием, находящимся в цилиндрическом волноводе бесконечной длины, заполненном идеальной жидкостью и имеющем абсолютно жесткие (а. ж.) или импедансные (и.) боковые стенки (б. с.), с использованием метода конечных элементов.

### Постановка задачи

Пусть внутри цилиндрического волновода бесконечной длины  $T$  радиуса  $r_0$  с центром  $O$  и осью  $T_1T_2$ , заполненного идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ , находится упругий объект  $E$ , внутренняя (основная) часть которого – однородный упругий эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и центром  $O_1$ . На поверхность эллипсоида нанесен неоднородный упругий слой толщины  $h$ . Считается заданным  $\mathbf{d}$  – смещение точки  $O_1$  от точки  $O$ . Также

известны физические характеристики (плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона) для однородной части тела –  $\rho_1$ ,  $E_1$ ,  $\nu_1$  и для внешнего слоя –  $\rho_2(\mathbf{r})$ ,  $E_2(\mathbf{r})$ ,  $\nu_2(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки пространства. Боковые стенки волновода являются абсолютно жесткими или импедансными.

Из акустического пространства волновода на тело падает монохроматическая звуковая волна (плоская, цилиндрическая или сферическая). Полагается, что потенциал смещений  $\Psi_p$  частиц жидкости в ней имеет вид:

$$\text{а) } \Psi_p = e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \text{ б) } \Psi_p = H_0^{(1)}(k_0 r_s) e^{-i\omega t}, \text{ в) } \Psi_p = \frac{e^{i(k_0 r_s - \omega t)}}{r_s}, \quad (1)$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время; а)  $\mathbf{k}_0$  – волновой вектор падающей плоской волны

( $|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$ ); б)  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка;

$r_s = |(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s0}) \times \mathbf{e}_{sa}| / |\mathbf{e}_{sa}|$  – расстояние от оси цилиндрического волнового источника до текущей точки;  $\mathbf{r}_{s0}$  – точка, через которую проходит ось источника;  $\mathbf{e}_{sa}$  – направление оси источника; в)

$r_s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s0}|$  – расстояние от сферического волнового источника до текущей точки;  $\mathbf{r}_{s0}$  – центр источника.

Поскольку падающая волна является гармонической, то для функций, зависящих и от координат и от времени, зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$  будем опускать.

В результате взаимодействия с препятствием падающая волна искажается и образуется рассеянная волна, потенциал смещений  $\Psi_s$  частиц жидкой среды которой требует определения в задаче.

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1. Условно на нем показаны: однонаправленными стрелками – направление вектора  $\mathbf{k}_0$  плоской звуковой волны из (1.а); двунаправленной стрелкой и крестовым маркером

– ось  $e_{sa}$  цилиндрического волнового источника и точка  $\mathbf{r}_0$ , через которую она проходит, из (1.б); маркером-звездочкой – центр  $\mathbf{r}_0$  сферического волнового источника из (1.в).

Введем ортогональную декартову систему координат  $Oxyz$  так, чтобы направление оси  $Ox$  совпадало с направлением вектора  $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ . Также введем локальную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  так, чтобы уравнение поверхности  $\Gamma_1$  однородной части рассеивателя  $E$  имело каноническую форму

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c}\right)^2 = 1.$$

Введем параметр  $q$  – расстояние от поверхности  $\Gamma_1$  внутренних точек неоднородного упругого слоя тела  $E$ . Тогда локальные координаты точки  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  внутри внешнего слоя, соответствующей точке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  поверхности  $\Gamma_1$ , можно представить в следующем виде

$$x_2 = x_1 + qn_x, \quad y_2 = y_1 + qn_y, \quad z_2 = z_1 + qn_z,$$

где  $0 \leq q \leq h$ ;  $n_x, n_y, n_z$  – компоненты внешней единичной нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Gamma_1$  в точке  $M_1$  в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Значения  $n_x, n_y, n_z$  зависят от параметров  $a, b, c$  и координат  $(x_1, y_1, z_1)$  следующим образом

$$n_x = \frac{x_1(bc)^2}{g}, n_y = \frac{y_1(ac)^2}{g}, n_z = \frac{z_1(ab)^2}{g},$$

$$\text{где } g = \sqrt{(x_1(bc)^2)^2 + (y_1(ac)^2)^2 + (z_1(ab)^2)^2}.$$

Ориентацию осей локальной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  по отношению к глобальной  $Oxyz$  будем задавать углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  так, что координаты связаны выражением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_\alpha \cdot M_\beta \cdot M_\gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathbf{d},$$

где  $M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $M_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$  и  $M_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  –

матрицы поворота. Эти углы Эйлера будем трактовать как углы поворота тела  $E$  при задании его ориентации по отношению к системе координат  $Oxyz$ .

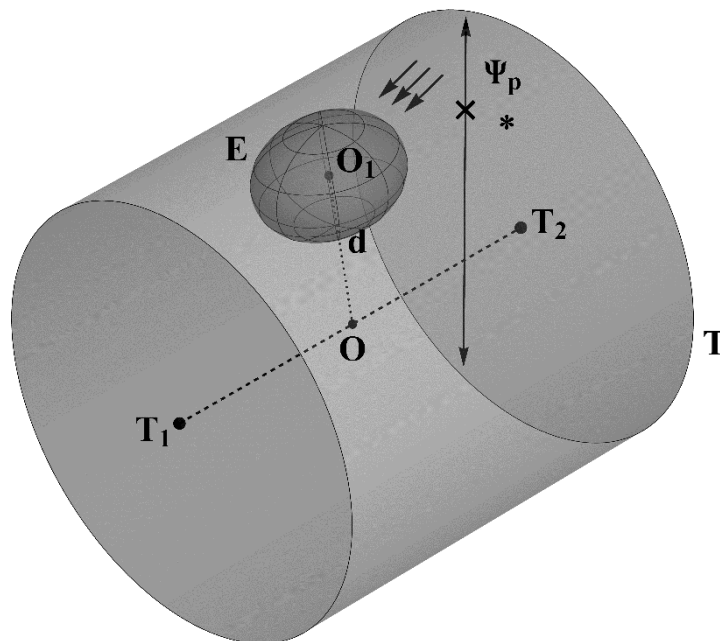


Рис. 1. Геометрия задачи

Схематично, геометрия задачи после введения систем координат представлена на рис. 2. Упругое тело на нем представлено сечениями поверхности  $E$  координатными плоскостями системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ . На осях  $O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$  указаны точки  $A', A''; B', B''; C', C''$  с локальными координатами  $(a, 0, 0), (a + h, 0, 0); (0, b, 0), (0, b + h, 0); (0, 0, c), (0, 0, c + h)$ .

Обозначим области, занимаемые различными средами так:  $\Omega_0$  – область цилиндрического волновода, занятая идеальной жидкостью;  $\Omega_1$  – область эллипсоида, занятая однородной упругой средой ( $[x_1/a]^2 + [y_1/b]^2 + [z_1/c]^2 \leq 1$ );  $\Omega_2$  – неоднородный слой упругого препятствия ( $x_2 = x_1 + qn_x, y_2 = y_1 + qn_y, z_2 = z_1 + qn_z, (x_1, y_1, z_1) \in \Gamma_1, 0 \leq q \leq h$ ).

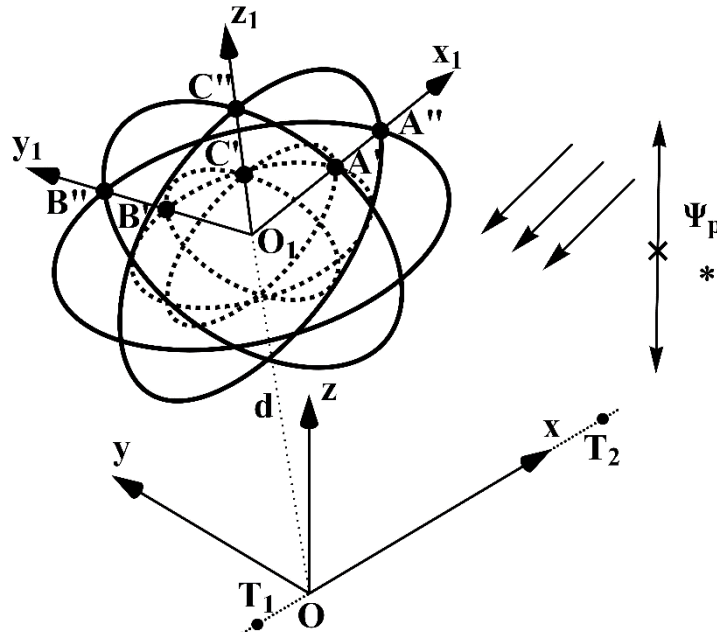


Рис. 2. Введение систем координат

В области  $\Omega_0$  движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей  $\Psi_p$  и рассеянной  $\Psi_s$  волнах. Смещение  $\mathbf{u}_0$  и давление  $p_0$  в области  $\Omega_0$  определяются через эти потенциалы так [18]

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad}(\Psi_0), \quad p_0 = \rho_0 \omega^2 \Psi_0, \quad (2)$$

где  $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$  – потенциал смещений в суммарном акустическом поле в области  $\Omega_0$ . При этом потенциал  $\Psi_s$  должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [18]

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0 \quad (3)$$

и условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_0 \Psi_s \right) \right] = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4)$$

где  $r = |\mathbf{r}|$ .

Предполагается, что движение частиц в препятствии подчиняется законам линейной теории упругости [19]. Обозначим вектор смещений и тензор напряжений в а)  $\Omega_1$  через  $\mathbf{u}_1$  и  $\sigma_1$ , б)  $\Omega_2$  через  $\mathbf{u}_2$  и  $\sigma_2$  соответственно. Тогда гармонические колебания частиц тела  $E$  описываются уравнениями движения

$$\text{div}(\sigma_\nu) = -\rho_\nu \omega^2 \mathbf{u}_\nu \quad (\nu = 1, 2), \quad (5)$$

где  $\text{div}(\sigma_{\nu})$  – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений  $\sigma_{\nu}$ .

Тензор напряжений выражается через компоненты вектора смещений посредством закона Гука, так что уравнения (5) можно рассматривать

$$\mathbf{u}_1|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_2|_{\Gamma_1}, \sigma_{1nn}|_{\Gamma_1} = \sigma_{2nn}|_{\Gamma_1}, \sigma_{1n\tau}|_{\Gamma_1} = \sigma_{2n\tau}|_{\Gamma_1} \quad (\tau = 1, 2), \quad (6)$$

где  $\sigma_{ijn}$  – компоненты скалярных произведений  $\mathbf{n} \cdot \sigma_i$  ( $i = 1, 2, j = n, \tau$ );  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\Gamma_1$ ;  $\tau$  – индекс, определяющий два касательных к  $\Gamma_1$  направления.

$$u_{1n}|_{\Gamma_2} = u_{0n}|_{\Gamma_2}, \sigma_{1nn}|_{\Gamma_2} = -p_0|_{\Gamma_2}, \sigma_{1n\tau}|_{\Gamma_2} = 0 \quad (\tau = 1, 2), \quad (7)$$

где  $n$  – индекс, соответствующий проекции на нормаль (индекс  $\tau$  на касательные) уже к поверхности  $\Gamma_2$ . Величины  $u_{0n}$  и  $p_0$  выражаются через потенциал  $\Psi_0$  в соответствии с (2).

$$\text{а) } u_{0n}|_{\tilde{\Gamma}_0} = 0, \text{ б) } p_0|_{\tilde{\Gamma}_0} = -i\omega Z_i u_{0n}|_{\tilde{\Gamma}_0}, \quad (8)$$

где б)  $Z_i$  – входной акустический импеданс внешней по отношению к  $\Omega_0$  среды. Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решений уравнений (3) и (5), удовлетворяющих граничным условиям (6), (7), (8) и условиям излучения (4).

#### Решение задачи

Решение задачи будем проводить численно с использованием метода конечных элементов на основе подхода [20, 21], основанного на

как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещений  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ .

На поверхности  $\Gamma_1$  соединения внешнего неоднородного слоя и эллипсоида должны быть непрерывными смещения и тензор напряжений:

На внешней поверхности тела –  $\Gamma_2$  – поверхности соприкосновения жидкости и упругого материала должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещений и тензора напряжений

Наконец, на границе области  $\Omega_0 - \tilde{\Gamma}_0$  – боковых стенках волновода в зависимости от их типа (а) абсолютно жестких или б) импедансных) должно выполняться условие

искусственном ограничении бесконечной области цилиндрического волновода с помощью условий, моделирующих излучающие границы. Эти условия позволяют моделировать излучение минимального отражения вводимой границей области волны соответствующего типа в окружающую среду. Следовательно, если поле, формируемое объектами внутри области имеет характер близкий типу излучающей границы, то его отражение, направленное внутрь области, оказывается минимальным. Граничное условие, имитирующее излучающую границу, имеет вид

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{n}} + \theta_{\zeta} \Psi_s + \eta_{\zeta} \Delta_{\parallel} \Psi_s = 0 \quad (\zeta = p, c, s), \quad (9)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к границе;  $\zeta$  – индекс соответствующий распространению плоской ( $p$  при  $\theta_p = ik_0$  и  $\eta_p = i/(2k_0)$ ), цилиндрической ( $c$  при  $\theta_c = ik_0 + 1/(2r_s) - 1/[8r_s(1 + ik_0r_s)]$  и  $\eta_c = r_s/[2(1 + ik_0r_s)]$ ) или сферической ( $s$  при  $\theta_s = ik_0 + 1/r_s$  и  $\eta_s = -\eta_c$ ) волны;  $\Delta_{\parallel}$  – оператор Лапласа в касательной плоскости для текущей точки границы.

Усечем бесконечную область  $\Omega_0$ , вводя в рассмотрение две торцевые излучающие границы  $\hat{\Gamma}_0$ , расположенные перпендикулярно оси

цилиндрического волновода  $T_1T_2$  на расстояниях  $OQ_1$  и  $OQ_2$  от начала системы координат

Охуз, так, чтобы внутри поверхности  $\Gamma_0 = \tilde{\Gamma}_0 \cup \hat{\Gamma}_0$  оказалось препятствие  $E$  и источник звуковых колебаний. При этом минимальное расстояние от упругого тела до

границ  $\hat{\Gamma}_0$  должно иметь порядок характерного размера упругого тела  $R = (a + b + c)/3 + h$ .

Геометрическая схема задачи, модифицированная добавлением излучающих границ, представлена на рис. 3.

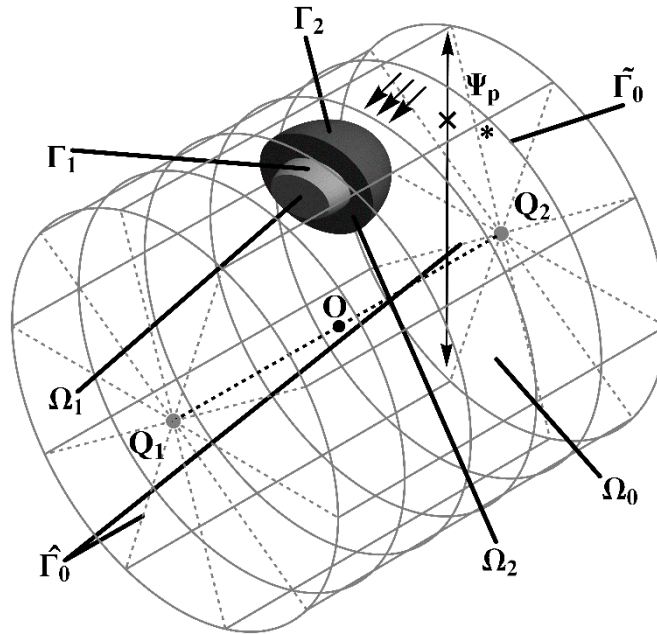


Рис. 3. Геометрия задачи с учетом границ  $\hat{\Gamma}_0$

В скорректированной постановке задачи условия излучения (4) заменяются одним из граничных условий (9).

Проведем дискретизацию совокупности областей жидкой и упругих сред  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$  путем разбиения их на конечные элементы в форме тетраэдров.

Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 4.

Все неизвестные функции в  $\Omega$  представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов [17]. В частности для потенциала  $\Psi_s$  можно записать

$$\Psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \psi_{s_k} f_k(\mathbf{r}), \tag{10}$$

где  $\psi_{s_k}$  – узловые значения потенциала в области  $\Omega$ ;  $f_k(\mathbf{r})$  – координатные функции конечно-элементной модели;  $K$  – количество узлов. Будем считать, что множество значений

$k = \overline{1, K}$  охватывает узлы всей КЭ-сетки области  $\Omega$ , а в узлах, не относящихся к  $\Omega_0$ , положим  $\psi_{s_k} \equiv 0$ .

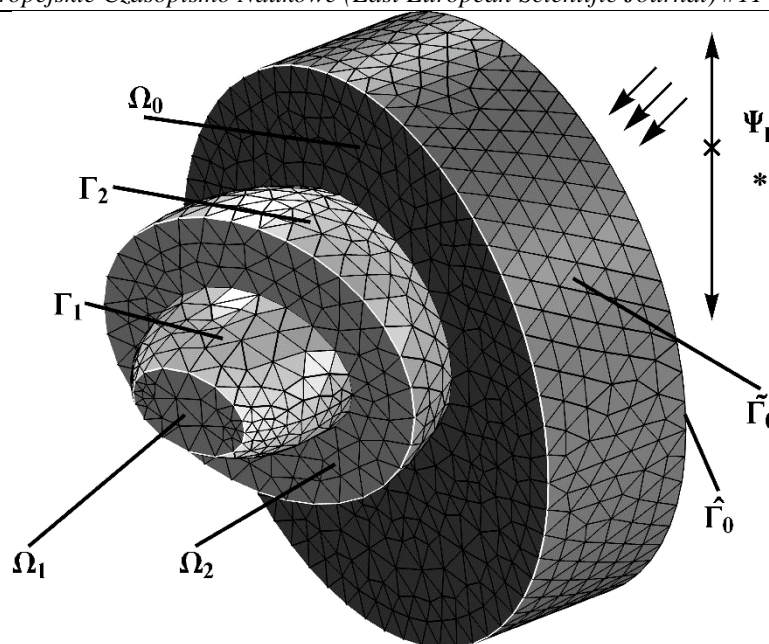


Рис. 4. Схема разбиения  $\Omega$  на конечные элементы

В форме, аналогичной (10), будем искать и смещение в упругом препятствии (в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ )

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{U}_k f_k(\mathbf{r}).$$

Здесь  $\mathbf{u}$  рассматривается как общее обозначение для смещений  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ , введенных выше.

В результате граничные условия (6), (7), (8), и одно из (9) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций  $\Psi_s$ ,  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  из ограниченной области  $\Omega$ . После этого можно решать краевую задачу для уравнений (3), (5) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [17]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций  $\Psi_{s_k}$ ,  $\mathbf{U}_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ).

#### Численные исследования

Представленная модель решения задачи была использована для численных исследований определения рассеянного поля звуковой волны (плоской, цилиндрической или сферической) в математическом пакете MATLAB [22].

При проведении численных исследований анализировались значения потенциала смещений в рассеянной звуковой волне  $\Psi_s$ , полученные в пакете конечно-элементного анализа COMSOL Multiphysics [23], на окружности  $V$  радиуса  $r_0$  с центром  $F$ . Окружность, в свою очередь,

размещалась на боковой поверхности цилиндрического волновода параллельно границам  $\hat{\Gamma}_0$ .

В качестве функциональных зависимостей параметров упругой среды в неоднородном слое рассматривались зависимости  $w_1(h) = 1/2 + q/h$  и  $w_2(h) = 3/2 - q/h$ . Зависимость параметров материала неоднородного слоя от координат представлялась в виде

$$\rho_2(q) = \rho_1 w(q), E_2(q) = E_1 w(q), \\ \nu_2(q) = \nu_1 w(q),$$

где  $w(q)$  – одна из функций  $w_1(q)$ ,  $w_2(q)$  или  $w_0(q) \equiv 1$  (последняя предполагает постоянство значения параметра во всем слое).

Предполагались следующие геометрические характеристики цилиндрического волновода:  $r_0 = 3 \text{ м}$ ,  $OQ_1 = OQ_2 = 4 \text{ м}$ . В качестве идеальной среды, заполняющей область  $\Omega_0$ , использовалась жидкость с плотностью  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$  и скоростью звука  $c_0 = 1485 \text{ м/с}$ . В случае, когда боковые стенки цилиндрического волновода являются импедансными, входной акустический импеданс внешней по отношению к  $\Omega_0$  среды определялся как  $Z_i = -\rho_0 c_0$ .

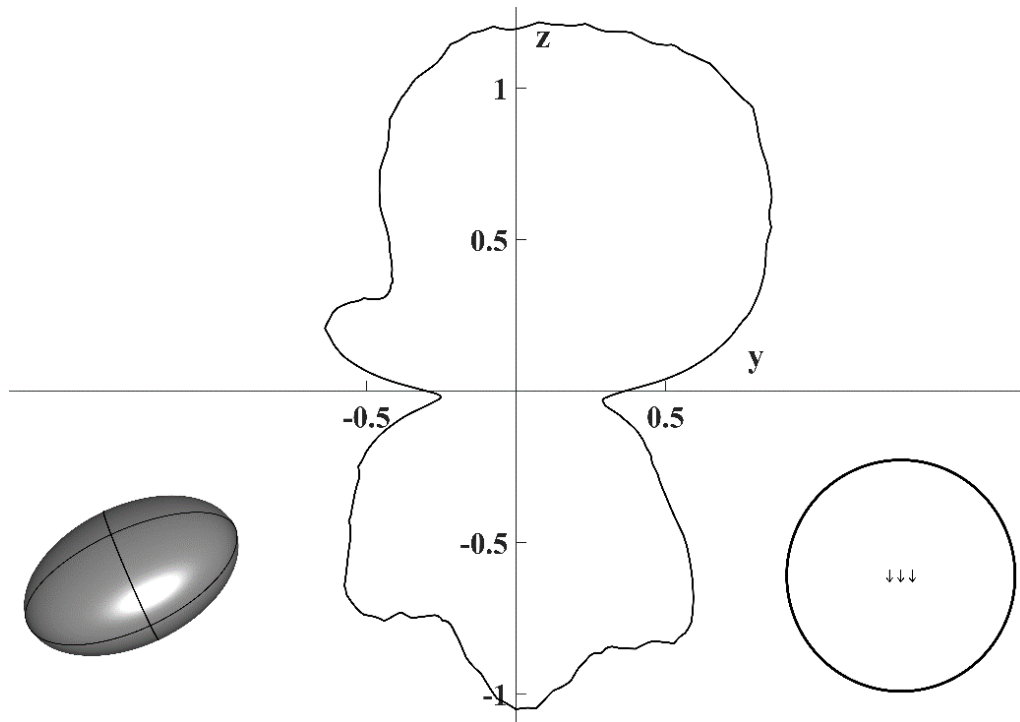
Рассматривалось упругое препятствие, имеющее фиксированные геометрические параметры:  $a = 1$  м,  $b = 0.75$  м,  $c = 0.5$  м;  $h = 0.3$  м;  $\mathbf{d} = (-1, 0, 0)$  м,  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pi/3, \pi/4, \pi/5)$ . Плотность и модули упругости в области  $\Omega_1$  задавались так:  $\rho_1 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_1 = 6,9443 \cdot 10^{10}$  Па и  $\nu_1 = 53/158$ .

Частота падающей волны выбиралась такой, что  $k_0 R = 4.4$ , а ее геометрические характеристики устанавливались так: а) плоская –  $\tilde{\mathbf{k}}_0 = -(\sqrt{9/10}, 0, 1/\sqrt{10})$ , где  $\mathbf{k}_0 = k_0 \tilde{\mathbf{k}}_0$ ; б) цилиндрическая –  $\mathbf{e}_{sa} = (0, 0, 1)$  и  $\mathbf{r}_{s_0} = (2, 0, 1.5)$  м; в) сферическая –  $\mathbf{r}_{s_0} = (2, 0, 1.5)$  м.

Центр  $F$  контура  $V$  имел следующие координаты а)  $\mathbf{OO}_1 \cdot \mathbf{e}_x$  или б)  $\frac{(\mathbf{OO}_1 + \mathbf{r}_{s_0}) \cdot \mathbf{e}_x}{2}$  ( $\mathbf{e}_x$  – орт оси  $Ox$ ). Выражение а) соответствует варианту плоской волны, а б) – цилиндрической и сферической.

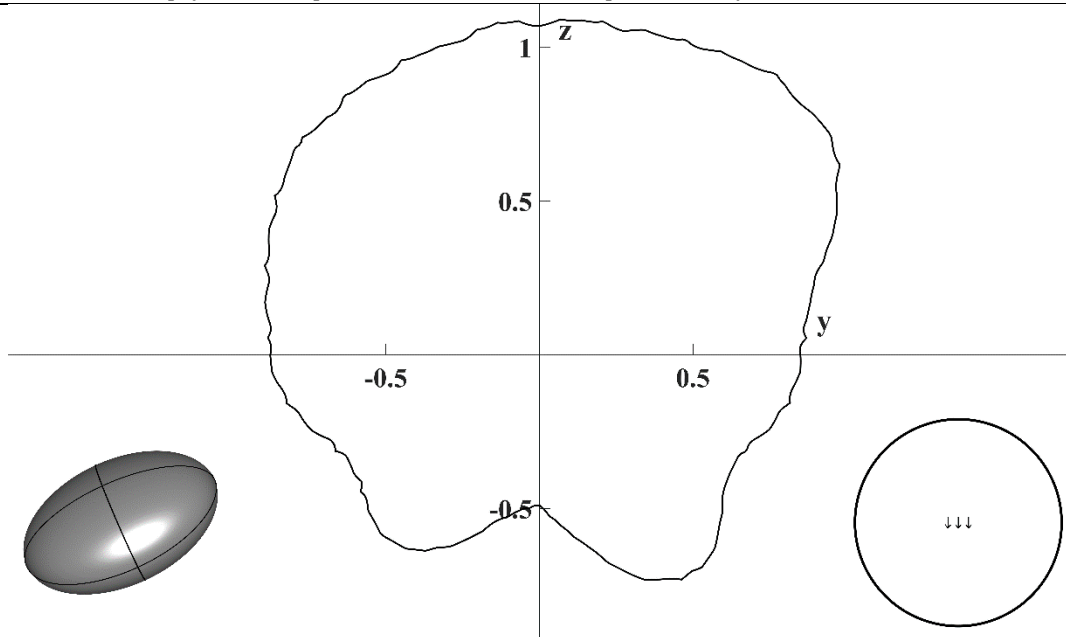
На рис. 5.а, 5.б; 6.а, 6.б; 7.а, 7.б представлены диаграммы рассеяния плоской, цилиндрической и сферической волн соответственно. Сплошной линией на них представлена величина  $|\Psi_s|$ . На графиках под кривой  $|\Psi_s|$  слева от оси  $Oz$  схематично показана ориентация упругого

препятствия  $E$ , а справа – конфигурация источника звуковых колебаний, подобно изображенному на рис. 1 – 4 (окружность соответствует контуру границы  $\hat{\Gamma}_0$ ) при наблюдении вдоль оси  $Ox$ .



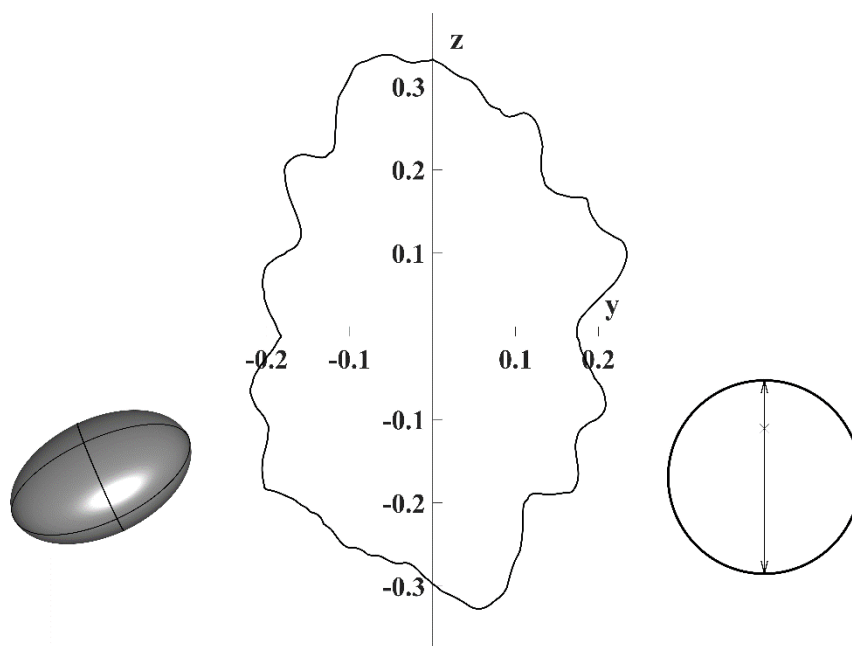
а) а. ж. б. с. для  $\Omega_0$



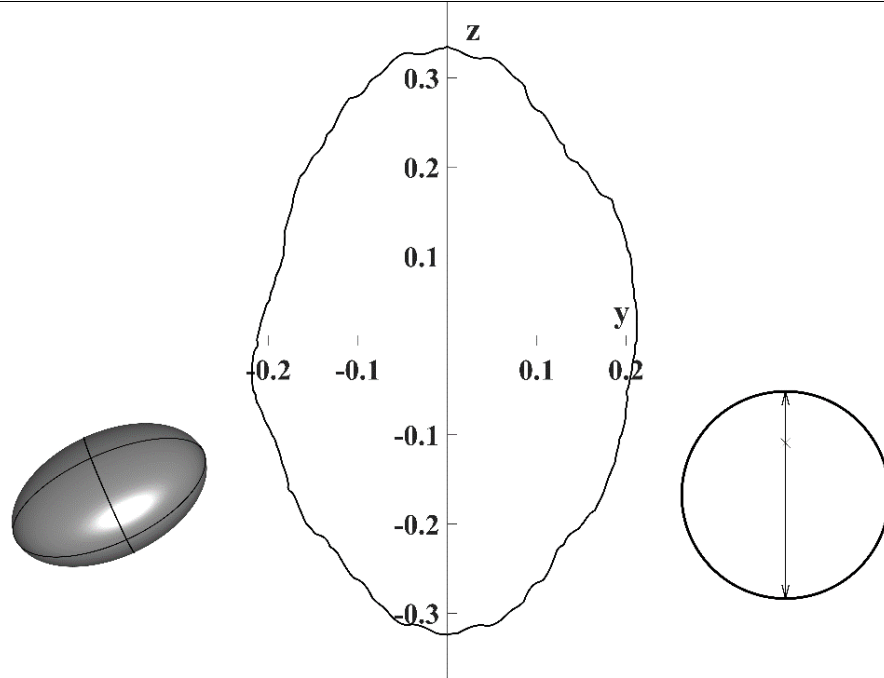


б) и б. с. для  $\Omega_0$

Рис. 5. Диаграммы  $|\Psi_S|$  для плоской звуковой волны в случае  $w(q) = w_0(q) \equiv 1$  для  $E$

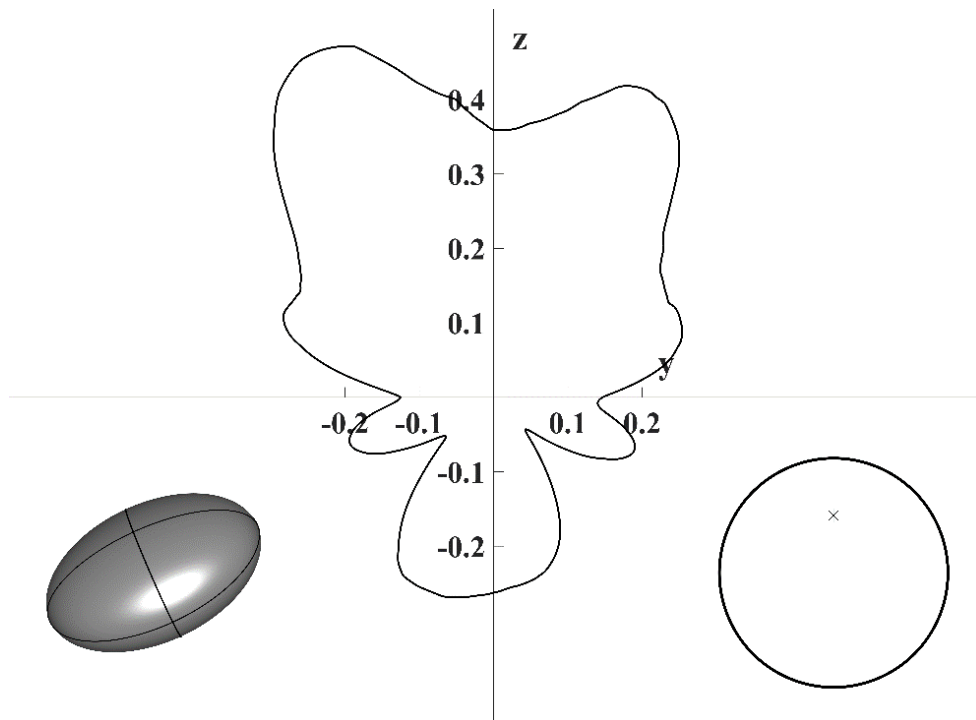


а) а. ж. б. с. для  $\Omega_0$

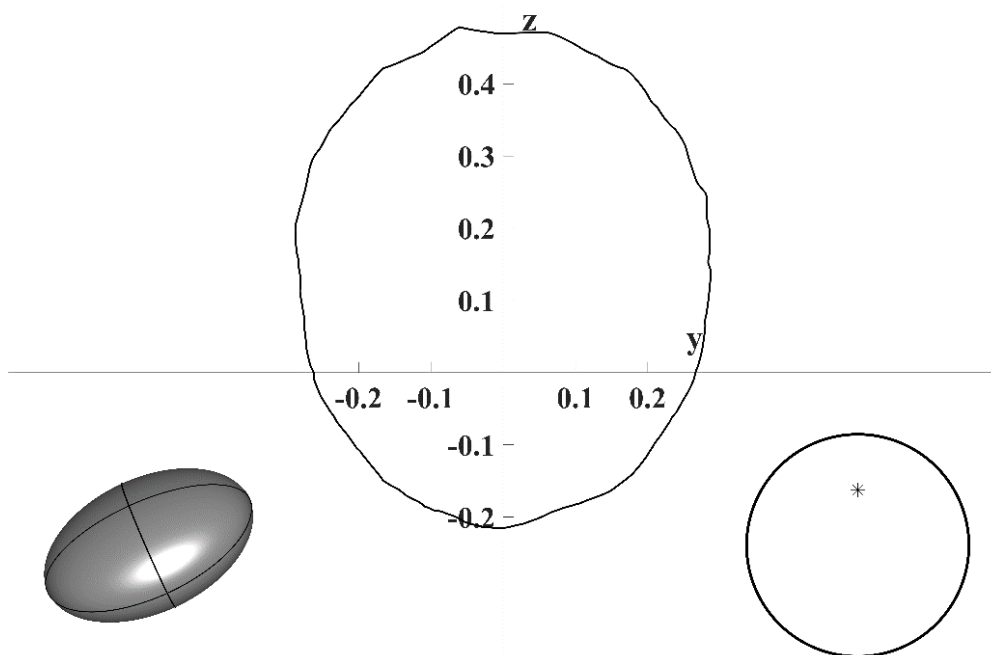


б) и. б. с. для  $\Omega_0$

Рис. 6. Диаграммы  $|\Psi_S|$  для цилиндрической звуковой волны в случае  $w(q) = w_2(q) \equiv 1$  для  $E$



а) а. ж. б. с. для  $\Omega_0$



б) и б. с. для  $\Omega_0$

Рис. 7. Диаграммы  $|\Psi_S|$  для сферической звуковой волны в случае  $w(q) = w_1(q) \equiv 1$  для  $E$

Рис. 5 – 7 наглядно показывают, как характер боковых стенок цилиндрического волновода  $T$  и закон изменения параметров материала внешнего неоднородного слоя упругого препятствия  $E$  изменяют вид диаграммы рассеяния. Данный факт особенно заметен на рис. 5.б, 6.б и 7.б, где при смене конфигурации боковых стенок в области  $\Omega_0$  с абсолютно жестких на импедансные форма кривой  $|\Psi_S|$  становится более выпуклой для большинства  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

#### Заключение

Представленное решение показывает эффективность использования метода конечных элементов для решения задач о рассеянии звука при достаточно сложных конфигурациях упругих рассеивающих объектов. Он позволяет представить решение неким однотипным алгоритмом, который сохраняет свою структуру при широком диапазоне изменения параметров задачи.

Полученные результаты показывают, что при рассмотренной частоте звука физические параметры задачи (тип боковых стенок цилиндрического волновода и функция неоднородности внешнего слоя упругого препятствия) оказывают значительное влияние на характер рассеянного поля. Следует ожидать, что повышение частоты падающей волны приведет к более выраженным изменениям диаграммы рассеяния при варьировании упомянутых физических свойств.

В перспективе планируется применение изложенного алгоритма для решения дифракционных задач подобных конфигурации,

учитывая при этом теплопроводящие свойства рассеивающего тела и жидкости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

#### Литература

1. Flax, L. Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation / L. Flax, L. Dragonette, V. K. Varadan, V. V. Varadan // J. Acoust. Soc. Amer. – 1982. – V. 71. – № 5. – P. 1077-1082.
2. Клещев, А. А. Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей / А. А. Клещев // Акуст. журн. – 1986. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 268-271.
3. Hackman, R. H. A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids / R. H. Hackman, G. S. Sammelmann, K. L. Williams, D. H. Trivett // J. Acoust. Soc. Amer. – 1988. – V. 83. – № 4. – P. 1255-1266.
4. Рождественский, К. Н. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде / К. Н. Рождественский, Л. А. Толоконников // Акуст. журн. – 1990. – Т. 36. – Вып. 5. – С. 927-930.
5. Толоконников, Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом сфероиде с малым эксцентриситетом в вязкой среде / Л. А. Толоконников // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 1997. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 152-157.
6. Клещев, А.А. Резонансное рассеяние звука на упругих сфероидальных телах и оболочках / А. А. Клещев // Акуст. журн. – 2014. – Т. 60. – № 3. – С. 253-261.

7. Толоконников, Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом сфероиде / Л. А. Толоконников, А. В. Лобанов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2011. – Вып. 2. – С. 176-191.
8. Толоконников, Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием / Л. А. Толоконников // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 2. – Ч. 2. – С. 265-274.
9. Толоконников, Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием / Л. А. Толоконников // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 202-208.
10. Иванов, В. И. Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку / В. И. Иванов, С. А. Скобельцын // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 179-192.
11. Толоконников, Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием / Л. А. Толоконников // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78. – Вып. 4. – С. 519-526.
12. Толоконников, Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием / Л. А. Толоконников, Г. А. Родионова // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып. 3. – С. 131-137.
13. Толоконников, Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью / Л. А. Толоконников // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып. 2. – С. 181-193.
14. Скобельцын, С. А. О дифракции звука на упругом сфероиде с непрерывно-неоднородным покрытием / С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников // Современные проблемы математики, механики, информатики: матер. междунар. науч. конф. – Тула : ТулГУ, 2013. – С. 457-464.
15. Harari, I. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems / I. Harari, T. J. R. Hughes // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* – 1991. – V. 87. – P. 59-96.
16. Gan, H. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain / H. Gan, P. L. Levin, R. Ludwig // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1993. – V. 94. – № 3 – Pt. 1 – P. 1651-1662.
17. Ihlenburg, F. Finite element analysis of acoustic scattering / F. Ihlenburg. – New York : Springer Publishing Company Inc., 2013. – 226 p.
18. Исакович, М. А. Общая акустика / М. А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 496 с.
19. Новацкий, В. Теория упругости. / В. Новацкий – М. : Мир, 1975. – 872 с.
20. Скобельцын, С. А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов: монография. / С. А. Скобельцын. – Тула : ТулГУ, 2018. – 224 с.
21. *Acoustics Module User's Guide* / Stockholm : COMSOL AB, 2018. – 698 p.
22. *MATLAB Programming Fundamentals* / MA. : The MathWorks, Inc., 2018. – 1418 p.
23. *LiveLink for MATLAB User's Guide* / Stockholm : COMSOL AB, 2018. – 352 p.