$$-\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(y, D_i w(y)) D_i^2(w^2)(y)\right) + 2 < a_i(y, Dw(y))(y, Dw(y), Dw(y)) <$$

$$< 2w(y)f(y + Dw(y), Dw(y)) \leq 4w(y)(\Lambda w(x) + \mu)$$

for a.e. $y \in B_{\frac{3}{2}}$. Repeating the proof (4) and letting tend $t_0 \to +\infty$,we obtain is proved.

The result ıs now clear: with probabılıty greater than or equal to λ_0, X_τ is in V so that $u(X_\tau) \leq \frac{(m_+ + m_-)}{2}$; when X_τ is not in V, $u(X_\tau) \leq m_+$. Thus, $u(x_0) \leq \lambda_0 \frac{(m_+ + m_-)}{2} + \left(1 - \frac{\lambda_0}{2}\right)(m_+ + m_-) + C_\rho \left(1 + \sup_{Q_\rho}|u|\right)$. Finally,

$$u(x_0) - m_- \leq \left(1 - \frac{\lambda_0}{2}\right)(m_+ + m_-) + C_\rho\left(1 + \sup_{Q_\rho}|u|\right).$$

This is true for any $x_0 \in Q_{\frac{\rho}{8}}$ so that

$$\operatorname{osc}_{Q_{\frac{\rho}{8}}} u \leq \left(1 - \frac{\lambda_0}{2}\right)\operatorname{osc}_{Q_\rho} u + C_\rho r\left(1 + \sup_{Q_\rho}|u|\right)$$

Theorem is proved.

References.

1. Canillo S.,Weeden R. Weighted poincare and Sobolev inequalities.
Nonlinear Analysis, 107, pp.1151-1226 .

2. De Giorgi E. Sulla differenziabilita e l analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari.Mem.Accad.Sci.Torino Cl. Sci. Fis.mat.Natur. 3(1957), pp.25-43.

3. Nash J. Continuity of solutions of parapolic and elliptic equations.Amer. J. Math. 80 (1958). 931-954.

4. Krylov N., Safonov M. An estimate for the probability of a diffusin process hitting a set of positive measure. Dokl. Akad. Nauk SSSr.245(1979),18-20.

5. Krylov N.,Safonov M. A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients. Izv. Akad. nauk SSSR. Ser.Mat. 44(1980),161-175.

6. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations.Acta Math. 111 (1964),247-302.

7. Ladyzhenskaya O., Uraltseva N., Solonnikov V. Linear and quasilinear equations of parapolic type. Amer.Math. Society, providence,R.I.1967.

8. Gilbarg P., Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, Berlin.1983.

9. T.Gadjiev, T.Maharramova, Holder estimates for the solutions of degenerate nonlinear elliptic equations of non-divergence type. Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 25. 2017, p. 64–67.

УДК 510

Геворкян Грант Араратович
Научный сотрудник Института механики НАН РА, к.т.н,
Ереван – 19, пр. Маршала Баграмяна 24Б, Институт Механики,
Тел. (374 10) 390 301 (дом.), (374 96) 390 315 (моб.)

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

Gevorgyan Hrant Ararat
Researcher at the Institute of mechanics
of the National Academy of sciences of the Republic of Armenia
Yerevan – 19, ave. Marshal Baghramyan 24B, Institute of Mechanics,
Phones: (374 10) 390 301 (home), (374 96) 390 315 (mob.)

Аннотация. В предлагаемой статье приводится самобытная формулировка параболических тригонометрических функций, а также, исходя непосредственно из алгебро-геометрических предпсылок, обсуждаются их основные свойства и особенности.

Abstarct. In the present paper an original formulation of parabolic trigonometric functions are brought, and also, proceeding directly from algebraic-geometric premises, their basic propeties and particularites are discussed.

Սույն հոդվածում տրված է պարաբոլիկ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների յուրահատուկ ձեւակերպում, ինչպես նաեւ, ելնելով անմիջականորեն երկրաչափական նախադրյալներից, քննարկվում են դրանց հիմնական հատկություններն ու առանձնահատկությունները:

Ключевые слова: парабола, гипербола, окружность, эллипс, тригонометрия.
Keywords: parabola, hyperbola, circle, ellipse, trigonometry.

Առանցքային բառեր՝ պարաբոլ, հիպերբոլ, շրջանագիծ, էլիպս, եռանկյունաչափություն.

1. Введение. Нынче, в эпоху перенасыщенности теоретических знаний, черпаемых главным образом из математики, актуальные исследования в области геометрии, казалось бы, далеко переступили за пределы евклидовой геометрии. Однако выясняется, что в пределах евклидовой геометрии по сей день остаются немаловажные вопросы, требующие серьезного внимания и надлежащего осмысления.

Как известно, современные обозначения синуса и косинуса знаками *Sin* и *Cos* были впервые введены И. Бернулли в письме к Л. Эйлеру. Последний пришел к выводу, что эти обозначения весьма удобны, и стал употреблять их в своих работах. Впоследствии Эйлер ввел сокращенные обозначения других тригонометрических функций.

Первое появление гиперболических функций историки обнаружили в трудах английского математика А. Муавра, датируемых 1707 годом. Современное определение и обстоятельное их исследование выполнил, исходя из рассмотрения единичной гиперболы, В. Риккати в 1757 г. в труде «Opusculorum»; он же и предложил их обозначения: *Sh* и *Ch*. Независимое открытие и дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено И. Ламбертом в 1768 г., который установил широкий параллелизм формул обычной и гиперболической тригонометрий.

Современная наука не может довольствоваться арсеналом математики, приобретенным несколько веков назад, а порывается все дальше. Поскольку парабола и эллипс являются коническими сечениями так же, как и окружность и гипербола, то поему бы не существовать наряду с циркулярной и гиперболической также и параболической и эллиптической тригонометриям? В интернет помещен неопубликованный научный ресурс, озаглавленный «Параболо-тригонометрические функции» («The Parabolic-Trigonometric Functions»), авторами которого являются Даттоли Дж., Мильярати М., Кваттромини М. и Рикки П.Е., что служит наглядным свидетельством проводимых исследований в этом направлении. В предлагаемой статье предпринимается попытка пролить некоторый свет на эту первую часть вышеуказанной проблематики, а именно – на вопрос о существовании параболической тригонометрии.

2. Основные положения циркулярной и гиперболической тригонометрий. Известно, что традиционные тригонометрические функции синуса и косинуса выражают фундаментальную связь между углами произвольного прямоугольного треугольника посредством *основного тригонометрического тождества*:

$$Cos^2\alpha + Sin^2\alpha = 1, \qquad (1)$$

являющегося непосредственным следствием *теоремы Пифагора,* а также определений основных тригонометрических функций, т.е. $Cos\alpha = \frac{a}{c}$ и $Sin\alpha = \frac{b}{c}$ (рис. 1, а). Отсюда и происхождение названия первичных тригонометрических функций, которые здесь и далее будем именовать *циркулярными тригонометрическими функциями*.

Теперь переходим к рассмотрению основного тождества, связывающего гиперболические функции косинуса и синуса:

$$Ch^2\alpha - Sh^2\alpha = 1, \qquad (2)$$

откуда нетрудно заключить, что тождество (2) выражает не что иное, как перифраз основного тригонометрического тождества (1) для случая мнимых углов треугольника (рис. 1, б). В самом деле, с учетом основоположной гипотезы $i^2 = -1$, будем иметь:

$$\begin{aligned} Cos^2(i\beta) + Sin^2(i\beta) &= Ch^2\beta + i^2Sh^2\beta \\ &= Ch^2\beta - Sh^2\beta = 1. \end{aligned}$$

С другой стороны, прямоугольный треугольник с мнимыми углами должен быть в то же время и с комплексными длинами сторон; действительно, как видно из рис. 1, (б), тогда имеют место следующие преобразования:

$$\left(\frac{a + ia'}{c + ic'}\right)^2 + \left(\frac{b + ib'}{c + ic'}\right)^2 = \left(\frac{(a + ia')(c - ic')}{c^2 + c'^2}\right)^2 + \left(\frac{(b + ib')(c - ic')}{c^2 + c'^2}\right)^2 = 1.$$

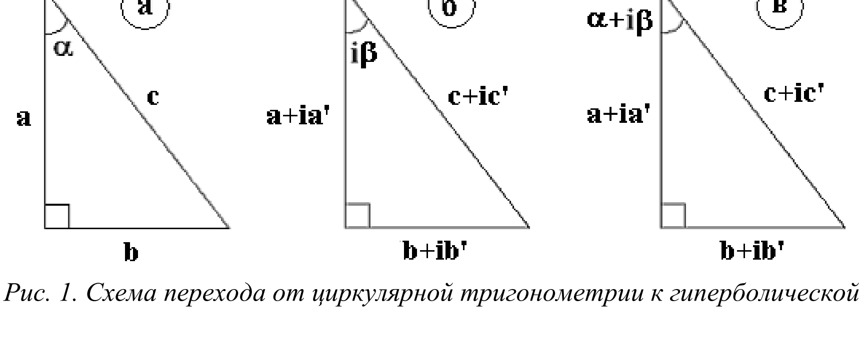

Рис. 1. Схема перехода от циркулярной тригонометрии к гиперболической

Сравнивая треугольники на рис. 1, (а и б), приходим к недоумению: почему длины сторон обобщенного прямоугольного треугольника комплексные, а углы – только мнимые? В самом деле, если обобщенный прямоугольный треугольник – это треугольник с комплексными длинами сторон, то он и углами должен располагать комплексными (рис. 1, в). Но как в таком случае будет удовлетворяться основное гиперболическое тождество (2)? Имеем

$$\begin{cases} Cos(\alpha + i\beta) = Cos\alpha Cos(i\beta) - Sin\alpha Sin(i\beta) = Cos\alpha Ch\beta - iSin\alpha Sh\beta; \\ Sin(\alpha + i\beta) = Sin\alpha Cos(i\beta) + Cos\alpha Sin(i\beta) = Sin\alpha Ch\beta + iCos\alpha Sh\beta, \end{cases}$$

откуда заключаем:

$$Cos^2(\alpha + i\beta) + Sin^2(\alpha + i\beta) = (Cos\alpha Ch\beta - iSin\alpha Sh\beta)^2 + (Sin\alpha Ch\beta + iCos\alpha Sh\beta)^2 =$$
$$= Ch^2\beta(Cos^2\alpha + Sin^2\alpha) - Sh^2\beta(Cos^2\alpha + Sin^2\alpha) = Ch^2\beta - Sh^2\beta = 1,$$

что в точности совпадает с основным гиперболическим тождеством (2), расписанным по отношению к мнимой части β угла $\alpha + i\beta$. Отсюда напрашивается вывод: в комплексных углах обобщенного треугольника действительная часть α является как бы «спящей», покамест его мнимая часть β отлична от нуля, т.е. $\beta \neq 0$; когда же $\beta = 0$, то и $a' = b' = c' = 0$, вследствие чего обобщенный прямоугольный треугольник вырождается в обыкновенный прямоугольный треугольник с действительными сторонами и с углом при вершине, равным «проснувшейся» действительной части α комплексного угла $\alpha + i\beta$.

В то же время становится очевидным, что комплексная модель прямоугольного треугольника никоим образом не противоречит V аксиоме Евклида о параллельных прямых: как следует из вышеизложенного, прямоугольный треугольник с мнимыми углами и комплексными сторонами оказывается как бы «наложенным» на прямоугольный треугольник с действительными углами и сторонами на одном и том же плоском двумерном евклидовом пространстве, причем сумма углов этих треугольников как в первом, так и во втором случае равна 180° (рис. 2).

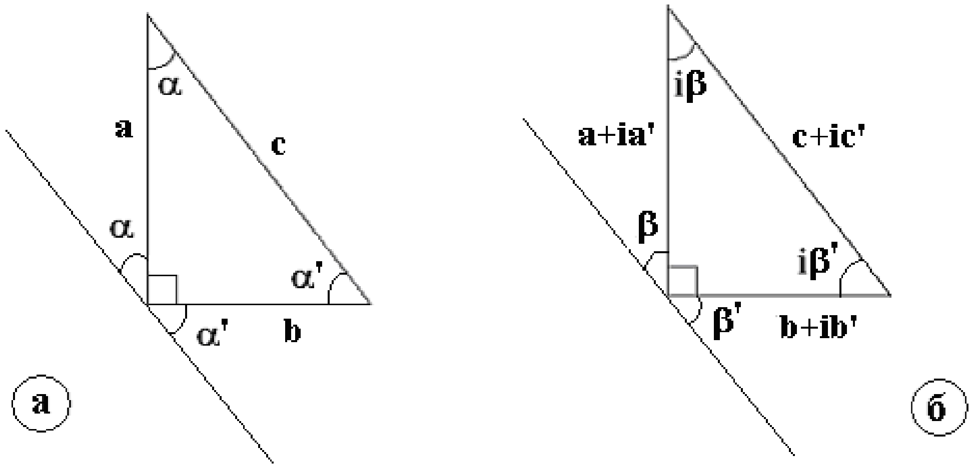

Рис. 2. Иллюстрация аксиомы Евклида о параллельных прямых

В силу удачно проведенного выше обобщения прямоугольного треугольника с действительными сторонами и углами на случай прямоугольного треугольника с комплексными сторонами и мнимыми углами возникает резонный вопрос, не являются ли гиперболические функции естественными обобщениями циркулярных тригонометриических функций? Главным аргументом в пользу этого предположения выступает то обстоятельство, что при $a' = b' = c' = 0$ комплексный прямоугольный треугольник вырождается в действительный! Однако, тем не менее, алгебра не может дать исчерпывающего ответа на этот вопрос.

3. Геометрическая интерпретация циркулярных и гиперболических тригонометрических функций. Всем хорошо известно, что циркулярные тригонометриические функции берут начало от *канонического уравнения окружности* (рис. 3, а):

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (3)$$

откуда после почленного деления на величину радиуса а сводимся к уравнению (1).

Как известно [1], *каноническое уравнение равносторонней гиперболы* записывается в следующем виде:

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (4)$$

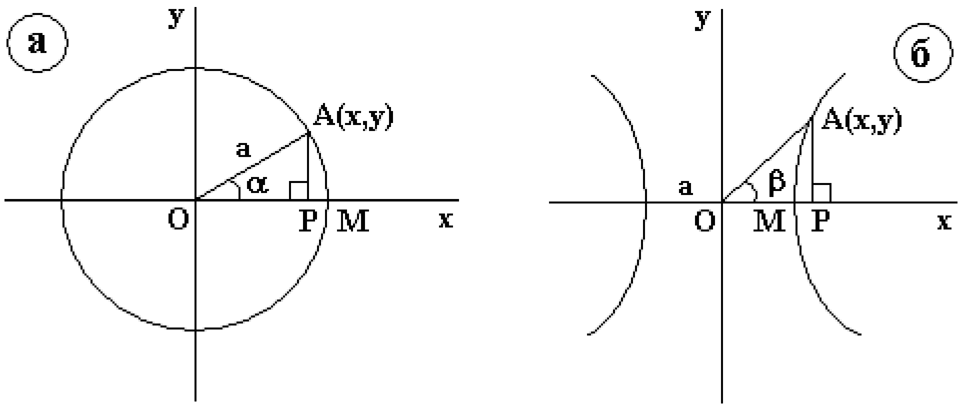

Рис. 3. Геометрическая интерпретация циркулярных и гиперболических функций

Выражения для гиперболических тригонометрических функций Ch и Sh можно получить путем представления площади криволинейного треугольника $\tilde{\Delta}$AMO через координаты текущей точки $A(x, y)$ (рис. 3, б) [2]. Имеем

$$S_{AMP} = \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}a^2 \, ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

далее

$$S_{AMO} = \frac{1}{2}xy - S_{AMP} = \frac{1}{2}a^2 \, ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{1}{2}a^2 \, ln\frac{x + y}{a}.$$

В итоге, после несложных преобразований, получаем:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{e^{S/a^2} + e^{-S/a^2}}{2} = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = Ch\beta; & (5) \\ \frac{y}{a} = \frac{e^{S/a^2} - e^{-S/a^2}}{2} = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} = Sh\beta, & (6) \end{cases}$$

где S – удвоенная площадь $\tilde{\Delta}$AMO, т.е. $S = 2S_{AMO}$.

Вследствие вышеприведенных формулировок (5) – (6) получает определенность *основное гиперболо-тригонометрическое тождество*:

$$Cp^2(\beta) - Sp^2(\beta) = 1. \quad (7)$$

4. Формулировка параболических тригонометрических функций. Каноническое уравнение [1] параболы с вершиной в точке *M(a, 0)* (рис. 4) записывается в виде:

$$y^2 = 2p(x - a). \quad (8)$$

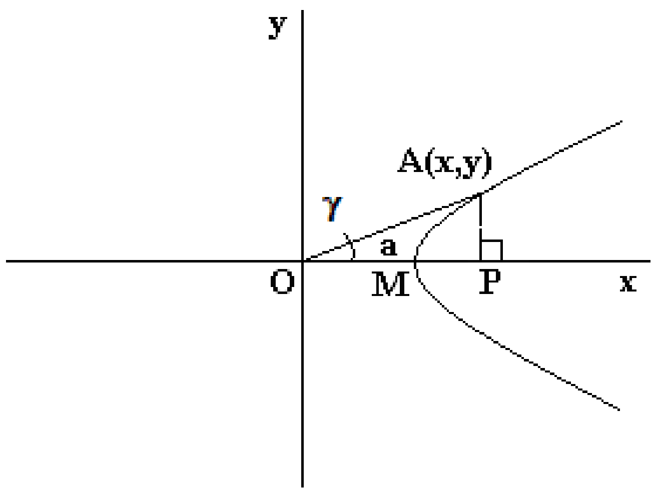

Рис. 4. Геометрическая интерпретация параболических функций

Как и в рассмотренном выше случае, выражения для параболических тригонометрических функций Cp и Sp можно получить путем представления площади криволинейного треугольника $\widetilde{\Delta}AMO$ через координаты текущей точки $A(x, y)$ (рис. 4). Имеем

$$S_{AMP} = \int_a^x \sqrt{2p(x-a)}dx = \frac{2}{3}(x-a)\sqrt{2p(x-a)} = \frac{2}{3}(x-a)y,$$

откуда

$$S_{AMO} = \frac{1}{2}xy - S_{AMP} = -\frac{1}{6}xy + \frac{2}{3}ay = -\frac{1}{12p}y^3 + \frac{1}{2}ay.$$

Полагая, как и раньше, $S = 2S_{\text{AMO}} = a^2\gamma$, где γ– угол, выраженный в радианах, а также нормируя параметр p уравнения (8) равенством $p = a/2$, приходим к следующему кубическому уравнению относительно координаты y текущей точки $M(x, y)$ (рис. 4):

$$-\frac{1}{6a^2p}y^3 + \frac{1}{a}y = \gamma, \qquad \text{или} \qquad -\frac{1}{3a^3}y^3 + \frac{1}{a}y = \gamma,$$

а следовательно, и относительно функции параболического синуса $Sp(\alpha) = y/a$, т.е.

$$Sp^3(\gamma) - 3Sp(\gamma) + 3\gamma = 0. \qquad (9)$$

Поскольку пересечение прямой с параболой возможно более чем в одной точке, то искомое значение параболического синуса должно естественным образом ассоциироваться с первым из возможных пересечений. Вообще же говоря, искомый корень кубического уравнения (9) должен определяться из совокупности т.н. «неприводимого случая» формулы Кардано, при котором имеют место три различных и действительных корня, т.к. в окрестности точки *M(a, 0)* дискриминант кубического уравнения (8) $D < 0$ [3]. Получаем

$$\left[\begin{aligned} Sp_1(\gamma) &= \xi + \tfrac{1}{\xi}; \\ Sp_2(\gamma) &= \varepsilon\left(\xi + \tfrac{1}{\xi}\varepsilon\right); \\ Sp_3(\gamma) &= \varepsilon\left(\xi\varepsilon + \tfrac{1}{\xi}\right), \end{aligned}\right. \qquad (10)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, а ξ– один из кубических корней в формуле Кардано.

Вследствие определения функции параболического синуса $Sp(\gamma)$ может быть без труда вычислена и функция параболического косинуса $Cp(\gamma)$ из следующего *основного параболо-тригонометрического тождества*:

$$Cp(\gamma) - Sp^2(\gamma) = 1. \qquad (11)$$

Нетрудно заметить из рис. 3, что область определения параболо-тригонометрических функций косинуса и синуса значительно уступает области определения соответствующих гиперболо-тригонометрических функций. Так, для осуществленной выше нормировки посредством равенства $p = a/2$ эта область определения характеризуется углом обхвата параболы касательными с угловыми коэффициентами, равными $k_{1,2} = \pm arctg 0.5 \approx \pm 27°$.

Как непосредственно следует из уравнения (9), все корни кубического уравнения (10) являются по определению алгебраическими числами. Из этого следует, что все значения функций параболического синуса выражаются алгебраическими числами. Легко заметить из уравнения (11), что функция параболического косинуса также принимает значения исключительно в алгебраических числах.

5. Упразднение трансцендентных чисел. В силу вышеизложенного представляется возможным исключить трансцендентные числа из множества действительных чисел R. Положим, что переменная β принимает строго трансцендентные значения. Путем введения *трансцендентной единицы t*, например, следующим образом:

$$t = \frac{\pi}{3.141592654}, \qquad (12)$$

где 3.141592654в (12) – алгебраическое число, преобразуем *формулу Эйлера*

$$e^{i\beta} = Cos\beta + iSin\beta, \qquad (13)$$

которая с учетом обозначения $\beta = t\gamma$ приводится к виду

$$a^{i\gamma} = Cos\beta + iSin\beta = Cos(t\gamma) + iSin(t\gamma), \qquad (14)$$

где a и γ – алгебраические числа, β – трансцендентное число, а t *и* i – трансцендентная и мнимая единицы.

В самом деле, на основании теоремы Линдемана о степенной функции степень $e^{\beta} = e^{t\gamma}$ выражается алгебраическими числами, а значит, выражается в алгебраических числах также и степень e^t. Далее легко доказывается, что при всех трансцендентных значениях аргумента в формулах

(13) и (14) функции *Sin* и *Cos* принимают исключительно алгебраические значения: для этого достаточно принять в формуле (14) $\beta = -\beta$, а затем полученный результат почленно прибавить к формуле (14).

Теперь, возвращаясь к проведенному во втором пункте обобщению прямоугольного треугольника с действительными сторонами и углами на случай прямоугольного треугольника с комплексными сторонами и мнимыми углами в контексте с гиперболической тригонометрией, убеждаемся, что указанное обобщение одинаковым образом остается в силе и в связи с параболической тригонометрией, в которой, однако, уже не остается места для трансцендентных чисел, а мнимая единица i уступает место *транс-мнимой единице*, определяемой следующим образом:

$$i_t = ti. \tag{15}$$

6. Заключение. Поскольку гиперболические тригонометрические функции могут принимать как алгебраические, так и трансцендентные значения, приходим к заключению, что математический интерес выдвинутой параболической тригонометрии сводится к своего рода «фильтрации» алгебраических чисел. В связи с этим напрашивается чрезвычайно важный для всей математики в целом вопрос о состоятельности нерациональных алгебраических и трансцендентных чисел вообще и о сомнительности их, казалось бы, незыблемой роли в составе континуума.

Литература

[1] Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука. Физматлит, 1966. – 272 с.

[2] Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1977. – 874 с.

[3] Cardano G. Ars magna or the rules of algebra. Translated in English, 1545. – 291 p.

Автор выражает признательность профессорам Белубекяну М.В., Казаряну К.Б. и Аветисяну А.С. за ценные замечания

Автор выражает признательность рецензенту статьи Геворкяну Л.З. за профессионально проведенную рецензию

Материал поступил в редакцию 1 декабря 2017 г.