Донской Государственный Технический Университет
Ашихмин Денис Валерьевич
бакалавр кафедры прикладной математики,
Донской Государственный Технический Университет
Ладоша Евгений Николаевич
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Донской Государственный Технический Университет
Цымбалова Виктория Михайловна
бакалавр промышленной безопасности и охраны труда,
ОАО «Ростсельмаш»
Цымбалов Денис Сергеевич
старший преподаватель кафедры электротехники и электроники,
аспирант кафедры прикладной математики,
Донской Государственный Технический Университет
Яценко Олег Вадимович
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики,
Донской Государственный Технический Университет

АНАЛИЗ РАЗМЕРА ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ АБРАЗИВНОЙ РЕЗКЕ СТАЛИ

Summary. A mathematical analysis of dust size distribution with respect to metal cutting residual is performed. It is found that dust investigated obeys the uniparametric exponential distribution. Regarding that in cyclone projecting the logarithmically normal distributional is used related numerical parameters are estimated as well. The main error source in size distribution determination is shown. It consists in an inadequate fashion of measurements representation by soft associated with experimental setup. Most perspective directions for further subjective studies are marked. Theese are partial size analysis for metal and abrasive as well as detailed studies of particles geometry.

Аннотация. Выполнен математический анализ размера пылевых частиц, образующихся при абразивной резке рельса. Установлено, что исследованная технологическая пыль хорошо описывается однопараметрическим экспоненциальным распределением. Поскольку в расчетах циклонов обычно используется модель логнормального распределения частиц по размерам, соответствующие числовые параметры определены на основе решения оптимизационной задачи. Выявлен основной источник погрешности при определении дисперсного состава пыли – неподходящая форма представления первичных данных в программном обеспечении измерительного комплекса. Указаны перспективные направления развития предметных исследований – раздельный анализ дисперсности основных компонентов пыли, образующейся при резании при одновременном детальном изучении геометрии микрочастиц.

Key words: metal cutting, dust, particle size distribution, mathematical statistic, mathematical programming.
Ключевые слова: резание металлов, пыль, распределение по размерам, статистика, математическое программирование.

Введение

Пыль, образующаяся при механической обработке твердых металлов и сплавов (резании, сверлении, шлифовании, полировке и пр.), наносит ущерб здоровью человека, загрязняет окружающую среду, а часто негативно влияет на качество последующей обработки. Чтобы исключить такие негативные эффекты обычно используются циклоны – устройства, предназначенные для захвата пыли воздушным потоком и последующего удаления ее из струи в накопитель за счет сил инерции [1]. Эффективность циклонов достигается предварительным аэродинамическим расчетом, цель которого определить такие параметры устройства, при которых гарантированно улавливаются содержащиеся в потоке твердые частицы (заданной категории) при минимальных экономических издержках. Так как улавливание частиц обеспечивается конкуренцией инерционных и аэродинамических сил, соответствующие физические критерии составляют основу расчета циклонов [2]. Размерные и массовые характеристики улавливаемых частиц служат здесь основой расчетных критериев. Вследствие неоднородности производственной пыли ее геометрические и соответствующие размерные характеристики имеют статистическую природу, что выдвигает жесткие требования к корректности их осреднения при расчетах циклонов. Следовательно, достоверные научные сведения о размерных и массовых параметрах пыли при различных видах механической обработки металлов крайне актуальны, поскольку их практическое применение позволяет рационально организовать пылеулавливание при помощи циклонов.

Целью данного исследования является разработка математических методов корректного осреднения размерно-массовых параметров производственной пыли, образующейся в различных технологических процессах. Практически полученные результаты предназначены для использования в анализе мелкодисперсных твердофазных технологических отходов широкого класса производств.

Теоретические основы исследования

На всякую пылевую частицу с характерным размером x [мкм] действует сила земного тяготения или иная инерционной природы, которая пропорциональна массе частицы, т.е. $\rho \cdot x^3$, где ρ [кг/м^3] – плотность образующего материала. Следовательно, знание инерционных свойств пыли сводится к знанию ее и характерного размера. Величина аэродинамической силы, действующей на такую частицу со стороны потока, пропорциональна квадрату ее характерного размера x^2 и не зависит от плотности. Фигурирующее в критерии эффективности циклона отношение этих сил соответственно пропорционально $\rho \cdot x$. Однако здесь следует учесть два важных обстоятельства: во-первых, пылевые частицы существенно отличаются по размерам и, во-вторых, форма каждой пылинки уникальна и далека от используемых эталонов (сфера, куб и др.). Эти особенности выдвигают весьма жесткие требования к процедуре двойного осреднения величины, названной выше *характерным размером* пылевой частицы – по размеру и форме. Очевидно, методика усредняющая размер пылинок, носит целевой характер: в нашем случае расчет эффективности циклонов.

Впервые проблему параметрического осреднения полидисперсных сред систематически исследовал *Заутер* [3-4]. Основные результаты его работ [3-4] сводятся к следующему. Для различных приложений важны специфически осредненные средние размеры частиц из неоднородной совокупности. Поскольку средний размер представляет собой некоторую величину, выражаемую долями метра, очевидным способом размерного осреднения ансамбля частиц с функцией распределения $F(x)$ и соответственно плотностью вероятности $P(x) = dF(x)/dx$ является следующий:

$$\langle x_{ij} \rangle \equiv D_{ij} = \left[\int P(x)\, x^i\, dx \,/\, \int P(x)\, x^j\, dx \right]^{1/(i-j)} . \quad (1)$$

Формула (1) подразумевает, что все пылевые частицы характеризуются единственным размером, т.е. имеют форму шара. Величину x_{ij} называют заутеровским диаметром (чаще всего под заутеровским диаметром понимается величина D_{32}). Если же форма частиц существенно не правильна и характеризуется двумя или темя параметрами, в рассмотрение вводят также коэффициент формы. Физический смысл и практическое применение различных заутеровских диаметров приведены в табл. 1, а важные сведения о коэффициенте формы в работах [5,6].

Таблица 1

Обозначение, приложение и методы определения заутеровских диаметров

Символ	Наименование	Приложение	Метод определения
D_{10}	Линейный или арифметический – CMD	Испарение жидкостей	Микроскопия, лазерная дифракция, акустическая дифракция
D_{20}	Поверхностный	Абсорбция	Электронные системы обработки изображения в микроскопии
D_{30}	Объемный	Гидрология	Электрозонной чувствительности (Electrozone sensing by Coulter gauge – Ref. US Patent 3557352)
D_{21}	Удельно-поверхностный	Адсорбция	Электронные системы обработки изображения в микроскопии
D_{31}	Удельно-объемный	Испарение жидкостей, молекулярная диффузия	Динамическая микроскопия
D_{32}	Основной заутеровский (средний по поверхности) – SMD	Оценка эффективности процессов, массоперенос, реакции	Седиментация (осаждение)
D_{43}	Дебруковский (средний по объему/массе)	Равновесное горение	Лазерной дифракции (LALLS – low angle laser scattering)

Среди множества параметров формы выделим два наиболее важных для наших целей – сферичность и скругленность [5]. Первый введен в употребление *Х. Уоделлом* [6] и свидетельствует о близости общей формы объекта к сфере. Сферичность определяется как отношение поверхности равнообъемной сферы к поверхности объекта. На основании изопериметрического неравенства можно показать, что сферичность любого тела меньше сферичности сферы, т.е. меньше единицы. Числовые показатели сферичности для основных моделей частиц приведены в работах [5-6]. Скругленность характеризует гладкость поверхности объекта: чем проще микрорельеф, тем выше этот показатель [5].

Выполненные разными авторами исследования дисперсности различных сред и материалов позволяют утверждать [7], что полученные в результате однократного дробления твердые частицы распределены по размерам согласно двухпараметрическому закону *Розина – Раммлера*:

$$F(x, D, n) = 1 - e^{-(x/D)^n}, \; P(x, D, n) = 1/D \cdot (x/D)^{n-1} \cdot e^{-(x/D)^n}, \quad (2)$$

где величина характеризует средний размер частиц $\langle x\rangle = D \cdot \Gamma(1 + 1/n)$, а n – степень размерной неоднородности ансамбля (чем меньше n, тем полидисперсный порошок).

При многократном измельчении порошки состоят из частиц, размеры которых удовлетворяют двухпараметрическому логнормальному распределению *Гаусса – Колмогорова*:

$$\mathrm{P}(x, D, \sigma) = \frac{lg\, e}{\sqrt{2\pi}\cdot \lg\sigma \cdot x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{lg\,x - lg\,D}{lg\,\sigma}\right)^2}. \quad (3)$$

В распределении (3) параметр $\lg D$ отвечает среднему размеру частицы, а параметр $\lg \sigma$ – разбросу реальных размеров частиц вокруг среднего.

Принципиальным достоинством модели *Гаусса – Колмогорова* является удобство пересчета величин D_{nm} по линейным соотношениям *Хэтча – Шоута* [8], связывающим их с величинами D и σ:

$$lg\, D_{43} = lg\, D + 1.151\cdot(lg\sigma)^2,\; lg\, D_{42} = 2\cdot lg\, D,\; lg\, D_{41} = 3\cdot lg\, D - 3.454\cdot(lg\sigma)^2,$$

$$lg\, D_{40} = 4\cdot lg\, D - 9.212\cdot(lg\sigma)^2,\; lg\, D_{32} = lg\, D - 1.151\cdot(lg\sigma)^2,\; lg\, D_{31} = 2\cdot lg\, D - 4.606\cdot(lg\sigma)^2,$$

$$lg\, D_{30} = 3\cdot lg\, D - 10.363\cdot(lg\sigma)^2,\; lg\, D_{21} = lg\, D - 3.454\cdot(lg\sigma)^2, lg\, D_{20} = 2\cdot lg\, D - 9.212\cdot(lg\sigma)^2,$$

$$\lg D_{10} = \lg D - 5.757\cdot(\lg\sigma)^2. \quad (4)$$

Форма соотношений (4) такова, что, зная две любые величины D_{nm} и D_{kl}, можно вычислить все прочие. Существенный практический интерес представляет общий вид зависимости (4), который известен как преобразование *Хэтча – Шоута* [8], но в явном виде не приведен в доступных литературных источниках.

В данной работе указанный пробел устранен путем вычисления интегралов, определяющих вид D_{ij}. Функцией распределения частиц по размерам выбрана логнормальная типа *Колмогорова – Гаусса*. Соответствующий результат имеет вид:

$$D_{ij} = (i - j)\cdot \ln x + 1/2\cdot(i + j)\cdot(i - j)\cdot(\ln \sigma)^2, \quad (5)$$

если интегрирование ведется в пределах от (–∞; + ∞) и

$$D_{ij} = (i - j)\cdot \ln x + 1/2\cdot(i + j - 6)\cdot(i - j)\cdot(\ln \sigma)^2, \quad (6)$$

если пределы интегрирования смещены на величину $3\cdot(\ln \sigma)^2$.

Форма соотношений (4)-(6) такова, что, зная две любые величины D_{nm} и D_{kl}, можно вычислить все прочие. Выведенные авторами, естественно, не впервые ном явные соотношения (5)-(6) приводится здесь по причине их важности при количественном анализе экспериментальных данных.

Важно отметить, что анализируемый нами порошок (отходы резания рельса) по природе образования не соответствует приведенным выше классическим моделями. Во-первых, технологический процесс содержит элементы как уникальности (каждый контакт абразивного круга с материалом рельса неповторим), так и многократной повторяемости (элементарные взаимодействия абразив – металл повторяются многократно). Во-вторых, форма отходящих абразивных и металлических частиц заметно отличается от сферической. Наконец, количественное соотношение абразивной и металлической фракций в пылевой смеси варьируется – в зависимости от марки обрабатываемого материала и особенностей режущего инструмента. Таким образом, исследование реального распределения отходящих пылевых частиц по размеру представляется практически важной научной задачей.

Экспериментальные данные

Физический анализ абразивно-металлической пыли осуществлялся при помощи лабораторно-измерительного комплекса *Fritsch Analysette 22 Compact*, использующего метод *LALLS – low angle laser light scattering* [9]. Программное обеспечение прибора обеспечивает выдачу результатов в графической (рис. 1) и обработанной цифровой форме (рис. 2).

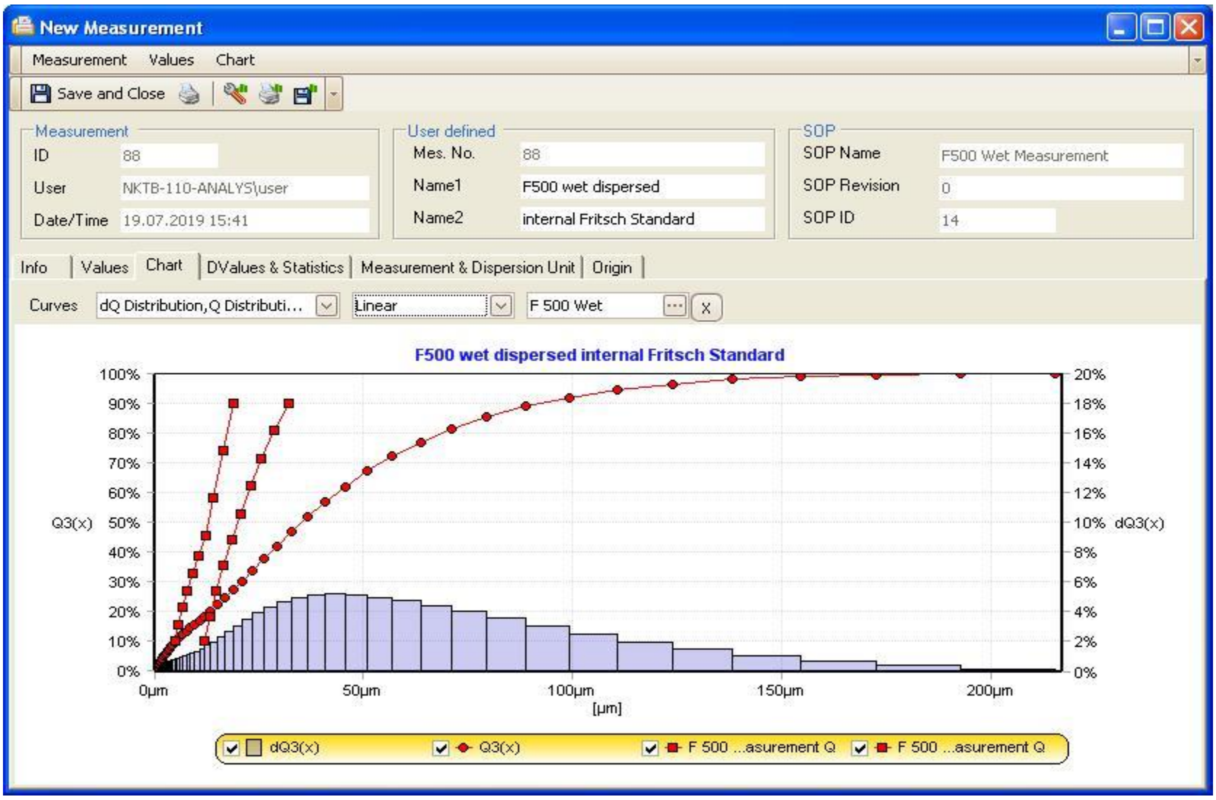


Рис. 1. Интерфейсное окно лабораторно-измерительного комплекса Fritsch Analysette 22 Compact с результатами фракционного анализа технологической пыли в первичной графической форме

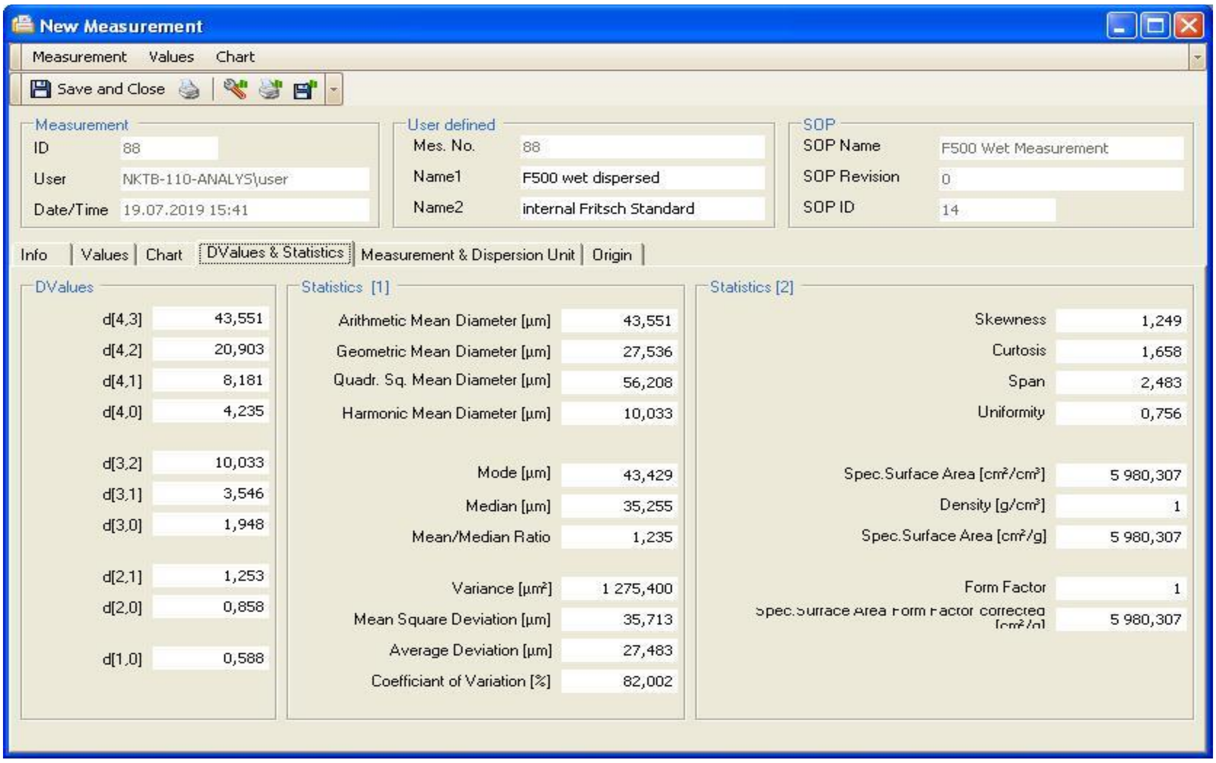


Рис. 2. Интерфейсное окно лабораторно-измерительного комплекса Fritsch Analysette 22 Compact с результатами фракционного анализа технологической пыли (осредненные числовые характеристики)

Необходимо отметить следующее: существенными недостатками программной части измерительного комплекса являются отсутствие детальных сведений об алгоритмах преобразования измеряемых величин и характере выводимых данных, а также отсутствие документации касательно данных, отображаемых в форме графиков и неизбежные сопутствующие погрешности. На первый взгляд, шкала дифференциальной функции распределения (рис. 1) приведена с погрешностью в несколько раз. Однако детальный анализ позволяет заключить, что фактически на графике приведена зависимость величины $P(x_k)\, dx_k$ от x_k, причем разбиение частиц на размерные группы шириной dx_k – не является равномерным. Кроме того, выводимые на экран (рис. 2) интегральные характеристики распределения частиц по размеру D_{ij} не документированы, что требует строить и проверять гипотезы относительно сути этих числовых показателей.

Следовательно, адекватная интерпретация экспериментальных данных возможна лишь на основе согласованного анализа интегральных числовых показателей, которые определяются функцией $P(x)$ (рис. 2), и графических представлений в обоих доступных форматах – с линейной и логарифмической размерными шкалами. В процессе сопоставления графических и числовых образов $P(x)$ требуется не только использовать специализированное программное обеспечение [10-11], но также разработать надлежащие алгоритмы согласования данных.

Техника оцифровки и верификации экспериментальных данных

Для оцифровки графических данных дисперсионного анализа, полученных при помощи прибора *Fritsch Analysette 22 Compact*, использовалась специализированная программа *Grafula* [12]. Этот информационный продукт автоматизирует оцифровку графически представленных зависимостей, т.е. их перевод в табличный вид. Процедура сводится к считыванию графика, размещению на нем декартовой системы координат и нанесению достаточного числа маркеров на линию графика. Применительно к нашей задаче описанный процесс иллюстрируется рис. 3.

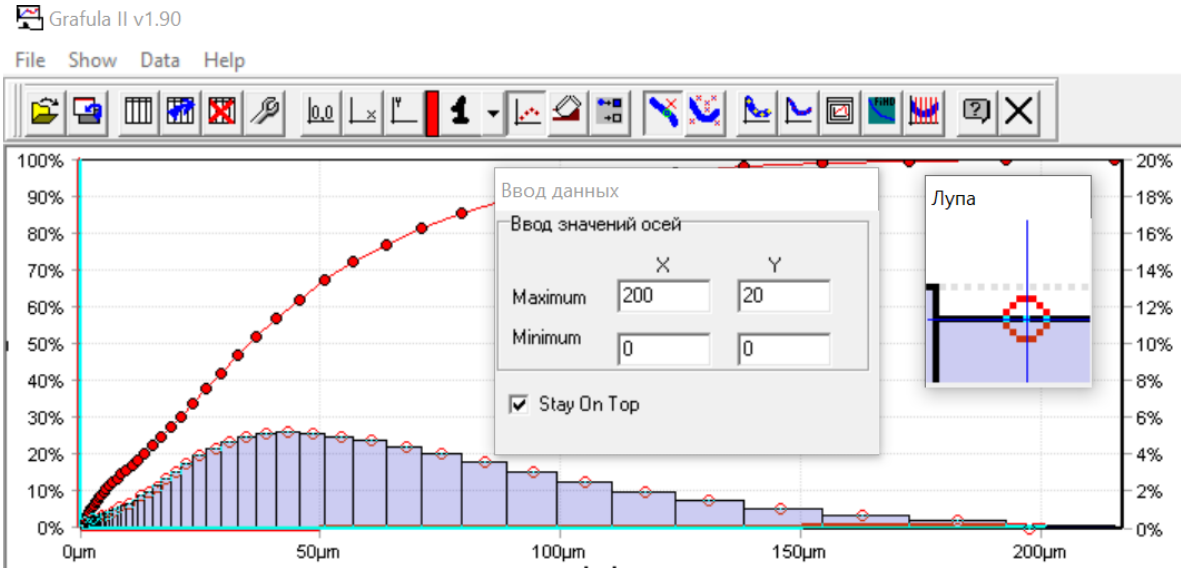


Рис. 3. Процедура оцифровки данных дисперсионного анализа металлоабразивной пыли при помощи прибора Fritsch Analysette 22 Compact в пакете Grafula [12] (применительно к построению с линейным размером частиц пыли x по оси абсцисс)

Результат автоматической оцифровки относится к положению введенных пользователем точек и формируется в Excel-совместимую таблицу (рис. 4). Отметим, что погрешность оцифрованных данных имеет несколько составляющих: 1) погрешность формирования графика, обусловленная аппаратными и программными особенностями измерительного комплекса, 2) дефекты систем графического отображения данных, 3) дискретизация при оцифровке графика программой *Grafula*, а также 4) невозможность точно маркировать кривую на графике из-за ограниченных психомоторных возможностей человека. Отмеченные обстоятельства требуют дополнительной проверки результатов с целью исключить критичные ошибки и оценить результирующую погрешность.

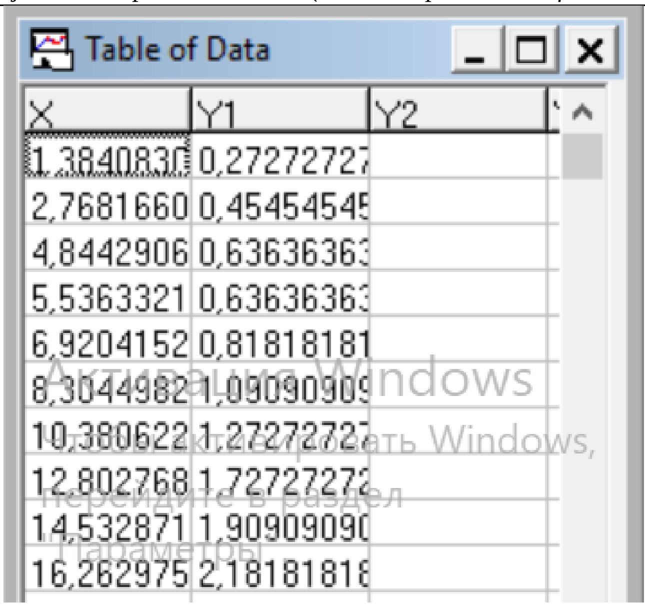


Рис. 4. Результат оцифровки данных дисперсионного анализа металлоабразивной пыли при помощи прибора Fritsch Analysette 22 Compact в пакете Grafula [12]

В целях верификации результата оцифровка осуществлялась дважды – применительно к данным в нормальном по размеру частиц представлении (рис. 1) и применительно к отображенным в логарифмическом масштабе (рис. 5). Затем результаты первичного анализа сопоставлялись графически (рис. 6). Для компенсации перечисленных выше погрешностей оба оцифрованных ряда подвергались перенормировке. В результате удалось исключить систематическую погрешность и обеспечить выполнение важного для функции распределения $F(x)$ условия $F(\infty) = 1$. Затем на основе каждого из результатов строились однотипные модельные распределения, эмпирические параметры которых определялись методами математического программирования [13], а затем сопоставлялись. Последним этапом согласования служила проверка соответствия осредненных величин, рассчитанных по построенным модельным распределениям, как взаимного, так и интегральным характеристикам, выводимым программным обеспечением измерительного прибора.

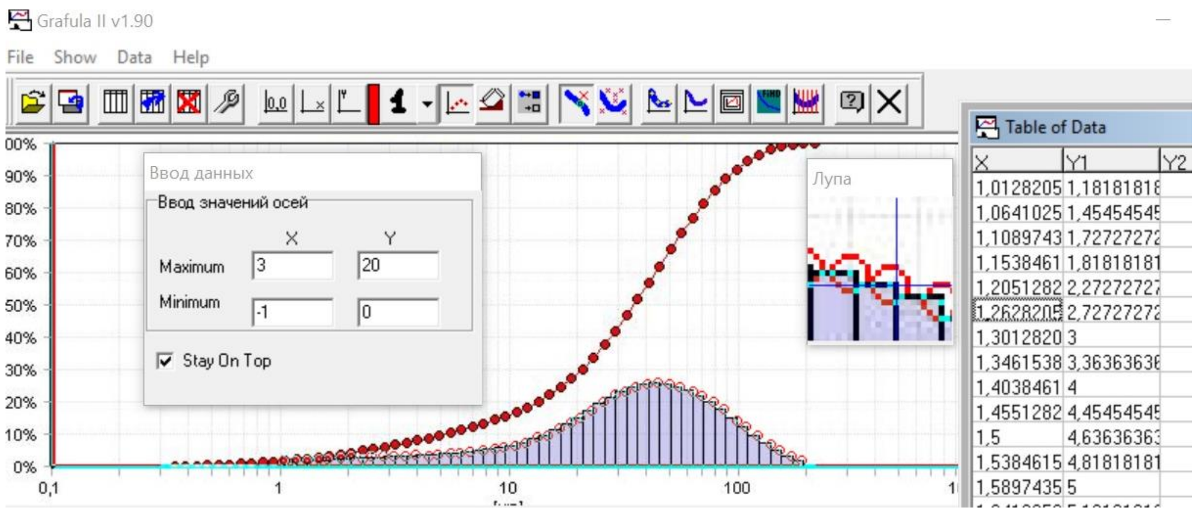


Рис. 5. Процедура оцифровки данных дисперсионного анализа металлоабразивной пыли при помощи прибора Fritsch Analysette 22 Compact в пакете Grafula [12]
(применительно к построению с логарифмом линейного размера частиц пыли x по оси абсцисс)

Данные рис. 1 удалось оцифровать лишь в 35 точках (вследствие их сгущения и слияния с осью абсцисс при $x \to 0$), а для данных рис. 5 оцифровка выполнена для всех 50-ти измерительных диапазонов прибора.

Оказалось, что искажение функции распределения $F(x)$ в результате невозможности извлечь ее из измерительного прибора в цифре составляет 15 % при оцифровке графика рис. 1 ($F(\infty) \approx 0.85$) и 8 % при оцифровке графика рис. 5

($F(\infty)$ ≈ 0.92). Компенсировать выявленные масштабные искажения позволила перенормировка: после нее числовые значения, полученные с графиков рис. 1 и рис. 5 удовлетворительно согласуются между собой (рис. 6). Из этого рисунка следует, что полученные обратной оцифровкой распределения практически совпадают, начиная с диаметра 10 мкм. Отметим, что полтора десятка левых точек, доступные лишь при считывании с графика, имеющего логарифмическую шкалу размеров (рис. 6), свидетельствуют о значительном числе мелких (размером менее 10 мкм) частиц, которые особо опасны для человека. Данное обстоятельство следует иметь в виду при проектировании циклона, поскольку инерционному отсеву подвержены крупные частицы, а очистка потока от мелкодисперсной пыли требует надлежаще производительных фильтров.

Наше заключение, что при $x \geq 10$ мкм выводимые прибором графические распределения рис. 1 и рис. 6 совпадают, подтверждается следующей проверкой. Если аппроксимировать зависимостью *Розина – Раммлера* оба ряда оцифрованных данных (для ряда с логарифмическим размерным масштабом при этом взяты последние 35 точек), можно количественно оценить отличия сравниваемых вариантов обратной оцифровки.

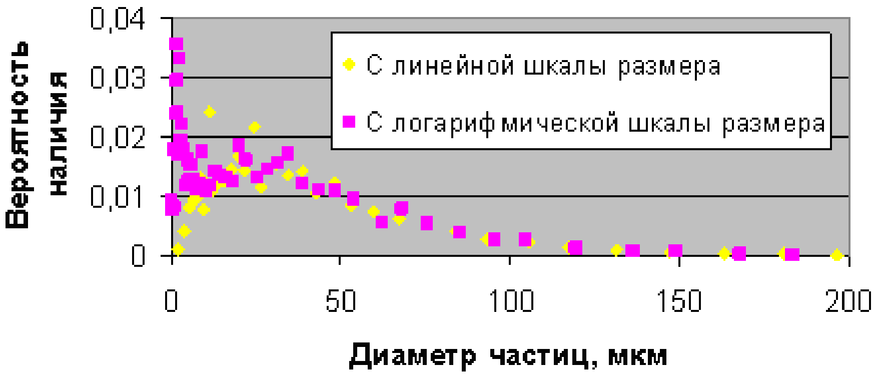


Рис. 6. *Сопоставление результатов оцифровки данных дисперсионного анализа металлоабразивной пыли: сравниваются данные, полученные на основе линейной (желтые точки) и логарифмической (розовые точки) размерных шкал*

Для аппроксимации функцией (2) сравниваемых данных рис. 6 численно решалась задача математического программирования [13]: минимизировалась невязка между экспериментальным и модельным распределениями частиц. Если невязку определять по удобной для вычислений декартовой норме, требуется минимизировать функционал

$$\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{D}, \mathrm{n}) = \sum_k [P(x_k, \rightleftarrows D, \rightleftarrows n) - P_k]^2 \to \min\,, \qquad (7)$$

в котором k – номер табличной точки; P_k – соответствующей значение экспериментальной плотности вероятности; D и n – параметры модельного распределения *Розина – Раммлера* (2).

Средствами Excel получены следующие решения задачи (2), (7) для данных рис. 6. Для данных, полученных с линейного по x графика (рис. 1), величины D и n равны соответственно 48.37 мкм и 1.588. При этом аппроксимирующая $P(x, D, n)$ кривая характеризуется средней невязкой с экспериментальными точками 0.00274 и коэффициентом корреляции 0.894. Решение задачи для 35 правых точек (рис. 5) выражается значениями D = 48.61 мкм, n = 1.346, обеспечивающими невязку 0.00187 и коэффициент корреляции 0.934. Близость параметров D и n для обоих способов оцифровки наряду с малой невязкой и высокой корреляцией свидетельствуют о равноценности анализируемых графических образов искомой зависимости. Об отличии формульного представления данных, полученных с графических источников рис. 1 и рис. 5 позволяет судить корреляция функций $P(x, D, n)$ с вычисленными выше значениями параметров. Ее величина (рис. 7) равна 0.99.

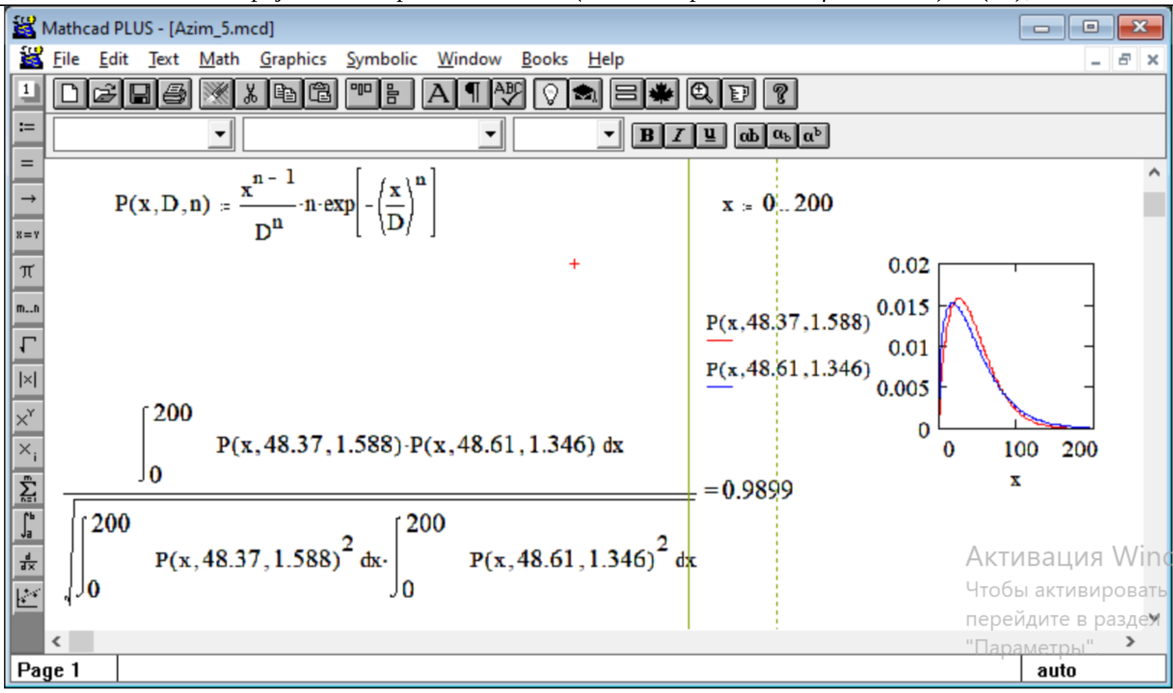


Рис. 7. Графическое и количественное сопоставление результатов оцифровки данных дисперсионного анализа металлоабразивной пыли: сравниваются данные, полученные на основе линейной (красная кривая) и логарифмической (синяя кривая) размерных шкал

Поскольку нам важны размерные характеристики пыли, осредненные на основании некоторого реалистичного распределения, вычислим набор показателей D_{ij} согласно инициализированной выше модели *Розина – Раммлера* при полученных разными способами значениях D и n. Затем сравним результаты между собой и с интегральными показателями D_{ij}, которые выводятся прибором *Fritsch Analysette 22 Compact*.

При этом важно понимать, что цель сравнения представленных на рис. 1 и 5 графических распределений с выводимыми прибором интегральными показателями D_{ij} – разобраться с тем, какое именно распределение отображено на этих рисунках. То обстоятельство, что на рис. 2 величина D_{43} совпадает со среднеарифметическим диаметром в пяти десятичных знаках, а величина D_{32} столь же близка к среднегеометрическому размеру, позволяет предположить, оси ординат на этих соответствуют дифференциалу взвешенной на x^3 функции распределения

$$dF(x_k) = P(x_k)\, x_k^3\, dx_k\,, \qquad (8)$$

что отличается от принятой в математике величины $P(x_k)$. Данное обстоятельство является ключевым при интерпретации результатов размерного анализа пылевых частиц на основе рассматриваемых гистограмм.

Проверим нашу гипотезу, рассчитав моменты D_{ij}. Сравнение результатов расчета, отвечающих принятию и отвержению гипотезы, с числовыми данными, выдаваемыми прибором *Fritsch Analysette 22 Compact* (рис. 2), приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сопоставление заутеровских диаметров пыли в предположении и отвержении гипотезы о взвешивании функции распределения на массу частиц на основе аппроксимаций рис. 6

Диаметр, мкм	Гипотеза (8) не верна		Гипотеза (8) верна		Числовые данные прибора, мкм
	D = 48.4 мкм, n = 1.588	D = 48.6 мкм, n = 1.346	D = 48.4 мкм, n = 1.588	D = 48.6 мкм, n = 1.346	
D_{43}	90.2	107.1	43.4	44.4	43.5
D_{42}	83.2	97.9	30.4	27.5	20.9
D_{41}	75.2	87.1	15.6	12.5	8.18
D_{40}	65.5	73.6	7.61	6.11	4.23
D_{32}	76.7	89.5	21.3	17.0	10.0
D_{31}	68.6	78.5	9.38	6.62	3.55
D_{30}	58.9	64.9	4.26	3.15	1.95
D_{21}	61.4	68.8	4.13	2.57	1.25
D_{20}	51.6	55.2	1.90	1.35	0.66
D_{10}	43.4	44.4	0.88	0.71	0.59

Как видно из представленных в табл. 2 данных, высказанное здесь предположение о сути данных, выводимых сервисной программой прибора, верна, что принципиально при размерном анализе пыли.

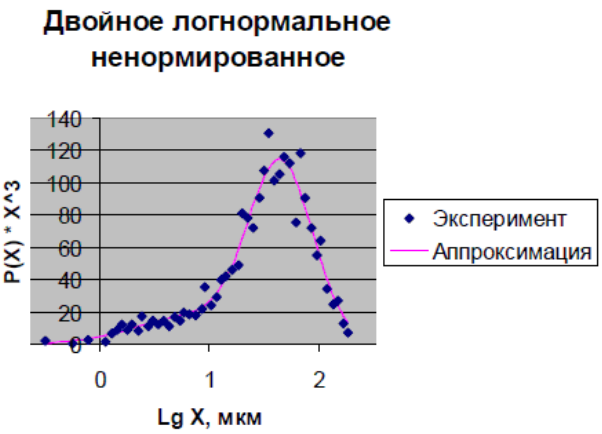
Результаты статистического анализа графических данных

Чтобы аккуратно учесть мелкодисперсную фракцию воспользуемся графическими данными рис. 5 (логарифмический масштаб размера по оси аргумента) и аппроксимируем их пятипараметрическим распределением – взвешенной суммой двух логнормальных:

$$P(x, D1, D2, \sigma 1, \sigma 2, \alpha) =$$

$$= \frac{lg\, e}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot\left[\frac{\alpha}{\sigma_1}+\frac{1-\alpha}{\sigma_2}\right]\left[\alpha\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{lg\, x-lg\, D_1}{lg\,\sigma_1}\right)^2}+(1-\alpha)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{lg\, x-lg\, D_2}{lg\,\sigma_2}\right)^2}\right], \quad (9)$$

где D_1 и D_2 – положение мод, σ_1, σ_2 – их ширина, α – доля частиц, приходящихся на первую моду. Решение соответствующей оптимизационной задачи [13] средствами Excel дает следующий результат: D_1 = 45.2 мкм, D_2 = 7.0 мкм, σ_1 = 0.97 мкм, σ_2 = 2.1 мкм, α = 0.858. Средняя невязка между аппроксимирующей функцией и исходными данными составляет 31 %, а коэффициент корреляции 0.977. Это неплохое соответствие, учитывая высокую погрешность экспериментальных значений (рис. 6). Отметим, что этот результат относится к взвешенной на x^3 истинной функции распределения пыли по размерам. Трактовать его можно следующим образом: основную массу пыли (около 85 %) составляют частицы размером более 10 мкм, поэтому для целей практической очистки воздуха его можно заменить двухпараметрическим логнормальным (3) с D = 45.2 мкм и σ =1.97 мкм. Такое упрощение, однако, не позволит качественно аппроксимировать D_{ij} с j < 3, в то время как учет мелкой фракции важен для некоторых приложений, например, для аккуратного вычисления всех используемых диаметров D_{ij} и моментов функции распределения $P(x)$. Результаты сопоставления двойной логнормальной и логнормальной аппроксимации $P(x)$ приведены на рис. 8 и в табл. 3.



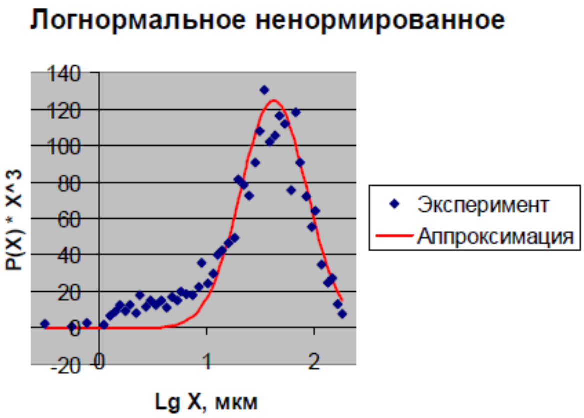


Рис. 8. Аппроксимация экспериментальных данных двойным логнормальным

распределением $P(x) = 0.176\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{lg\, x-1.65}{0.416}\right)^2} + 0.563\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{lg\, x-0.898}{0.791}\right)^2}$ (левый фрагмент, среднеквадратичная относительная погрешность составляет 0.31, коэффициент корреляции с экспериментальными точками составляет 0.977) и логнормальным распределением $P(x) = 0.563\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{lg\, x-1.63}{0.435}\right)^2}$ (правый фрагмент, среднеквадратичная относительная погрешность составляет 1.23, коэффициент корреляции с экспериментальными точками составляет 0.970)

Также изучалась возможность приблизить экспериментальные данные распределениями *Розина – Раммлера* (классическим и обобщенным трехпараметрическим $P(x, D, n, m) = (x/D)^m \cdot e^{-(x/D)^n} / \int (x/D)^m \cdot e^{-(x/D)^n} dx$). Сопоставить соответствующие результаты между собой и с данными аппроксимации логнормальной и двойной логнормальной функциями позволяют данные рис. 9 и табл. 3. Эти результаты свидетельствуют о близком качестве аппроксимации при использовании пятипараметрического двойного логнормального, трехпараметрического типа *Розина – Раммлера* и двухпараметрического классического *Розина – Раммлера* модельных распределений $P(x)$. В то же время логнормальное распределение не согласуется с опытными данными, поскольку не отражает наличия значительного числа очень мелких частиц в рассматриваемой технологической пыли.

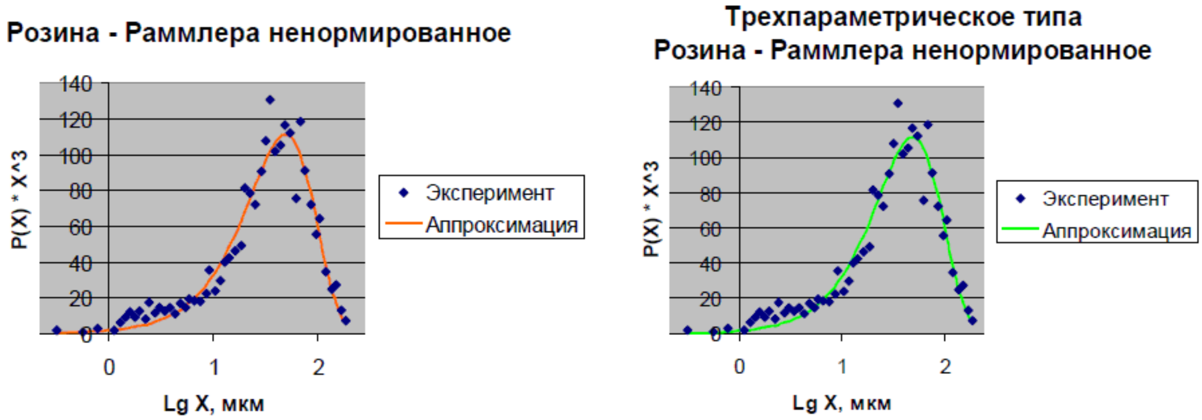


Рис. 9. Аппроксимация экспериментальных данных распределением Розина – Раммлера P(x) = 7.73·10–3·x0.322·exp[–(x/48.89)1.322] (левый фрагмент, среднеквадратичная относительная погрешность составляет 0.47, коэффициент корреляции с экспериментальными точками 0.972) и трехпараметрическим распределением P(x) = 6.66·10–3·x0.4·exp[–(x/66.18)1.235] (правый фрагмент, среднеквадратичная относительная погрешность составляет 0.51, коэффициент корреляции с экспериментальными точками 0.972)

Из проведенного анализа следует целесообразность аппроксимации экспериментальных данных монотонно убывающей функцией *P*(*x*). Простейшим вариантом здесь служит экспоненциальное распределение, которое можно рассматривать как частный случай распределения *Розина – Раммлера* при *n* = 1. Результаты сопоставления экспериментальных данных с этой моделью показаны на рис. 10. Данная аппроксимация демонстрирует хорошее согласие с экспериментом для малоразмерных фракций пыли, которые вследствие представительности существенно влияют на среднеквадратичную относительную погрешность аппроксимации. Рассчитанные на основе экспоненциального распределения интегральные показатели дисперсности также сведены в табл. 3.

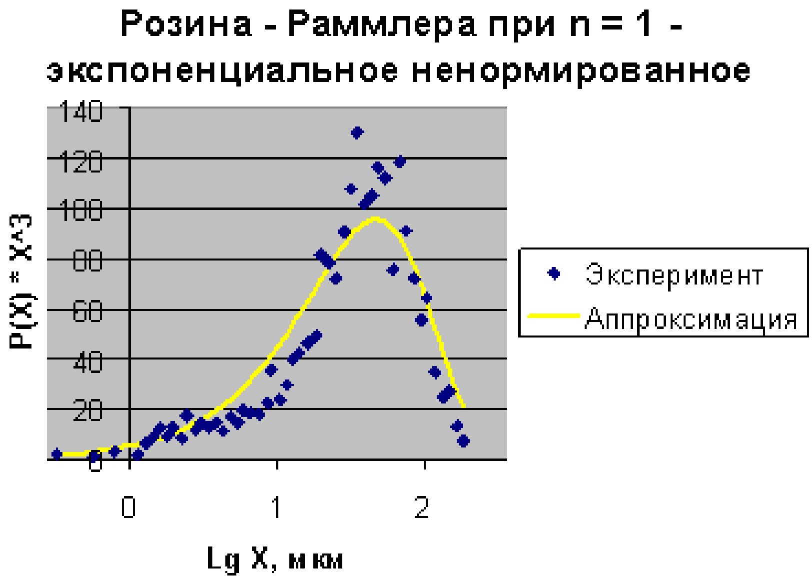


Рис. 10. Аппроксимация экспериментальных данных экспоненциальным распределением P(x) = 1/47.13·e– x/47.13. Среднеквадратичная относительная погрешность составляет 0.42, коэффициент корреляции с экспериментальными точками 0.948

Таблица 3

Интегральные показатели дисперсности пыли, рассчитанные на основе модельных распределений в сопоставлении с оцененными программными средствами измерительного прибора. Модельные распределения инициализированы по графическим данным

Параметр	Математическая модель, использованная для оценки					Фактическое значение
	Логнормальное	Двойное логнормальное	*Розина – Раммлера* трехпараметрическое	*Розина – Раммлера*	Экспоненциальное	
D_{43}, мкм	51.7	44.8	44.7	45.2	43.6	43.5
D_{42}, мкм	41.2	23.0	27.3	28.1	21.4	20.9
D_{41}, мкм	32.0	9.45	12.2	12.9	8.61	8.18
D_{40}, мкм	25.0	4.87	5.99	6.32	4.40	4.24
D_{32}, мкм	32.8	11.8	16.6	17.5	10.3	10.0
D_{31}, мкм	25.2	4.34	6.4	6.92	3.79	3.55
D_{30}, мкм	19.6	2.32	3.07	3.28	2.03	1.95
D_{21}, мкм	19.4	1.59	2.46	2.74	1.39	1.25
D_{20}, мкм	15.1	1.03	1.32	1.42	0.904	0.858
D_{10}, мкм	11.8	0.666	0.704	0.738	0.586	0.588
Мода, мкм	52.1	45.2	48.9	48.4	43.9	43.4
Медиана, мкм	42.1	36.2	37.0	37.3	32.3	35.3
Среднее/ Медиана	1.21	1.24	1.21	1.21	1.35	1.24
СКО σ, мкм	35.0	37.2	33.6	33.8	39.9	35.7
СМО |σ|, мкм	26.3	29.4	26.2	26.5	30.6	27.5
QSMD, мкм	62.1	58.9	55.9	56.5	54.4	56.2
GMD, мкм	39.3	33.1	31.4	32.2	24.8	27.5
Асимметрия	1.49	1.17	1.19	1.20	1.41	1.25
Эксцесс	2.28	1.49	1.46	1.50	1.66	1.66

Фигурирующие в табл. 3 интегральные показатели распределения рассчитываются по следующим формулам:

Показатель	Связь с дифференциальной функцией распределения
Мода, мкм	Mode: $d/dx\, P(x = \text{Mode}) = 0$
Медиана, мкм	Med: $F(\text{Med}) = 1/2$
Среднее/ Медиана	$\int P(x)\cdot x\, dx\, /\, \text{Med}$
СКО σ, мкм	$[\int P(x)\cdot(x - \langle x \rangle)^2\, dx\,]^{1/2}$, где $\langle x \rangle = \int P(x)\cdot x\, dx$
СМО |σ|, мкм	$\int P(x)\cdot\|x - \langle x \rangle\|\, dx$, где $\langle x \rangle = \int P(x)\cdot x\, dx$
QSMD, мкм	$[\int P(x)\cdot x^2\, dx\,]^{1/2}$
GMD, мкм	$\exp[\int P(x)\cdot \ln x\, dx\,]$
HMD, мкм	$1/[\int P(x)/x\, dx\,]$
Асимметрия	$[\int P(x)\cdot(x - \langle x \rangle)^3\, dx\,] / [\int P(x)\cdot(x - \langle x \rangle)^2\, dx\,]^{3/2}$
Эксцесс	$[\int P(x)\cdot(x - \langle x \rangle)^4\, dx\,] / [\int P(x)\cdot(x - \langle x \rangle)^2\, dx\,]^2$

Как следует из данных табл. 3, интегральные показатели распределения хорошо воспроизводятся однопараметрической экспоненциальной моделью

$$P(x) = 1/47.13\cdot e^{-x/47.13}\ . \tag{10}$$

Кроме того, представляется вполне оправданным использовать выводимые прибором интегральные показатели (см. табл. 3) непосредственно для решения обратной задачи – подбора подходящей модели распределения пылевых частиц по размеру. Естественно здесь требуется регуляризация, вариантами которой предлагается использовать рассмотренные выше модельные распределения. Результаты соответствующей аналитической и вычислительной работы приведены в следующем разделе.

Восстановление функции распределения по интегральным показателям

Рассмотрим дифференциальную функцию распределения как принадлежащую некоторому семейству k-параметрических интегрируемых на положительной полуоси функций вида $P(x, \boldsymbol{\alpha})$, где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ – вектор определяющих конкретный вариант параметров. При этом каждый из практически определяемых интегральных параметров этой функции представляет собой функционал, который является функцией параметрического вектора $\boldsymbol{\alpha}$. Естественно сформулировать задачу выбора оптимальной функции $P(x, \boldsymbol{\alpha})$ как функцию, обеспечивающую минимальную невязку между расчетными и практически известными значениями всех функционалов по подходящей норме.

В нашем случае рационально выбрать за норму суммарную квадратичную относительную погрешность функционалов из первого столбца табл. 3 или некоторого их подмножества. Если значения этих функционалов достаточно надежны, то чем больше их число N, тем надежней результат подбора оптимальной теоретической функции распределения $P(x, \boldsymbol{\alpha})$ заданного вида. Для иллюстрации такого подхода ограничимся значениями заутеровских диаметров D_{ij}. Математическая формулировка оптимизационной задачи принимает вид:

$$\Sigma \{ [\int P(x, \boldsymbol{\alpha})\, x^i\, dx / \int P(x, \boldsymbol{\alpha})\, x^j\, dx]^{1/(i-j)} / D_{ij} - 1\}^2 \quad \to \min ,$$

$$i = 1, \ldots , 4,\ j = 0, \ldots, i-1 . \qquad (11)$$

Можно доказать, что задача (11) эквивалентна задаче нахождения лучшего решения переопределенной системы алгебраических уравнений

$$[\int P(x, \boldsymbol{\alpha})\, x^i\, dx / \int P(x, \boldsymbol{\alpha})\, x^j\, dx]^{1/(i-j)} = D_{ij} ,$$

$$i = 1, \ldots , 4,\ j = 0, \ldots, i-1 . \qquad (12)$$

Для решения задачи (12) с пробными функциями распределения из табл. 3 воспользуемся средствами пакета MathCAD. Погрешность аппроксимации будем оценивать по величине невязки и коэффициенту корреляции левых и правых частей в уравнениях (12). На рис. 11-12 приведены алгоритм и результаты решения задачи для однопараметрической экспоненциальной функции распределения, а в табл. 5 результаты подбора оптимальных параметров для всех пяти моделей и соответствующие погрешности.

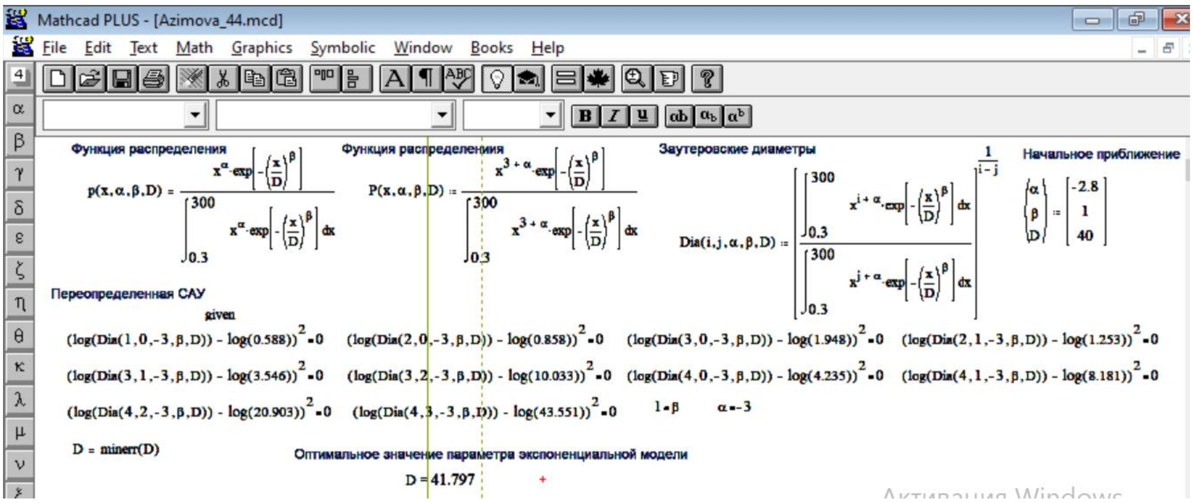


Рис. 11. Алгоритм решения задачи (11)/(12) для экспоненциальной функции распределения средствами MathCAD

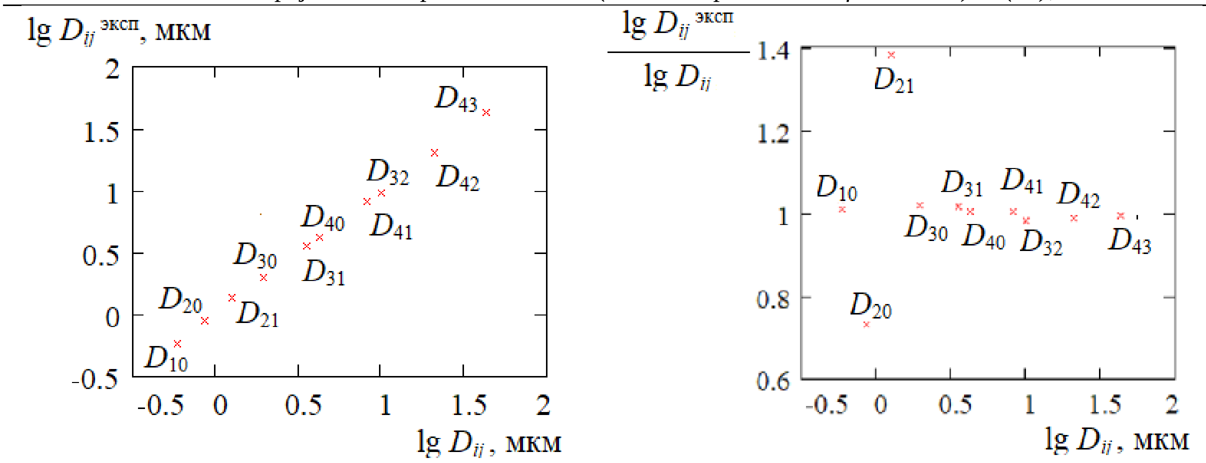


Рис. 12. Определение размерных характеристик пыли на основании набора интегральных показателей Dij: слева – сопоставление расчетных и экспериментальных значений, справа – величина относительной погрешности

Альтернативным способом определить масштабную величину D в экспоненциальном распределении $P(x)$ является решение оптимизационной задачи по обеспечению наибольшего согласия интегральных характеристик модельного и фактического распределений, приведенных в последних девяти строках табл. 3. Результаты таких расчетов, выполненные авторами, очень близки к результатам, полученным описанными выше способами.

С теоретической точки зрения интересен следующий результат, полученный авторами. Для экспоненциального распределения частиц по размерам интегрирование с надлежащими весами позволяет получить явные выражения для всех десяти заутеровских диаметров. Здесь, однако, важно учесть, что в силу расходимости соответствующих несобственных интегралов пределы интегрирования следует брать не от нуля до бесконечности, а соответствующими границам размерного разрешения измерительного прибора. Кроме того, эти границы удобно масштабировать, выражать в долях масштабной величины D. Если нижний предел интегрирования обозначить как $\varepsilon\, D$, а верхний как $N\,D$ ($0 < \varepsilon < 1$, $N > 1$), заутеровские диаметры вычисляются как:

$$D_{10} = 2\,\varepsilon\, D\,,$$

$$D_{20} = [2\ln(N/\varepsilon)]^{1/2}\,\varepsilon\, D\,,\; D_{21} = \ln(N/\varepsilon)\,\varepsilon\, D\,,$$

$$D_{30} = (2\,\varepsilon^2)^{1/3}\, D\,,\; D_{31} = \varepsilon^{1/2}\, D\,,\; D_{32} = \ln(N/\varepsilon)^{-1}\, D\,, \qquad (13)$$

$$D_{40} = (2\,\varepsilon^2)^{1/4}\, D\,,\; D_{41} = \varepsilon^{1/3}\, D\,,\; D_{42} = \ln(N/\varepsilon)^{-1/2}\, D\,,\; D_{43} = D\,.$$

Решая переопределенную систему (13) относительно ε, N и D, получаем следующие значения $N\,D \approx 43.34$ мкм, $\varepsilon\, D \approx 0.29$ мкм и $N\,D \approx 186$ мкм, которые хорошо согласуются как с ранее вычисленным размерным параметром пыли, так и с паспортными данными прибора-анализатора. Особо отметим, что погрешность такого способа инициализации экспоненциальной модели характеризуется корреляцией расчетных и фактических значений D_{ij} на уровне 0.999997 и среднеквадратичной относительной погрешностью около 0.7 %.

Оценить согласованность результатов идентификации модели в рамках гипотезы об экспоненциальном распределении частиц по размерам $P(x, \alpha) = P(x, D) = 1/D \cdot e^{-x/D}$ позволяют данные табл. 5.

Таблица 5

Результаты идентификации модели на основе различных данных, выдаваемых прибором *Fritsch Analysette 22 Compact*, и степень согласия результирующей модели и исходных табличных значений

Параметр	По данным оцифровки $P(x, \alpha)\cdot x^3dx$ в зависимости от x	По данным оцифровки $P(x, \alpha)\cdot x^3d(\lg x)$ в зависимости от $\lg x$	На основе величин D_{ij} численно	На основе прочих интегральных параметров численно	На основе величин D_{ij} аналитически
D, мкм	71.8	47.13	41.8	39.9	43.3
Относит. погрешность	0.645	0.28	0.78	0.093	0.0069
Корреляция	0.626	0.842	0.996	0.992	0.999997

Как видно из представленных в табл. 5 данных, наиболее надежным способом идентификации модели $P(x, \alpha)$ по выводимой прибором-анализатором информации является аналитическое и/или численное решение задачи (11)-(12), которая для экспоненциальной модели $P(x, D) = 1/D\cdot e^{-x/D}$ сводится к переопределенной системе алгебраических уравнений (13).

Выводы

Анализ экспериментальных дисперсного состава частиц, образующихся при резании рельса, по размерам сводится к следующему.

1. Прибор *Fritsch Analysette 22 Compact* не является оптимальным для исследования фракционного состава пыли, поскольку не выводит данные измерений в первичной числовой форме. Обратная оцифровка распечатываемых прибором графиков и последующие численные преобразования величины $P(x)\cdot x^3dx$ вносят критичный вклад в погрешность оценивания зависимости $P(x, \alpha)$. Потому рациональным способом извлечения достоверных сведений из данного прибора представляется инициализация вероятных модельных распределений на основе выводимых (рис. 2) интегральных показателей.

2. Для детального анализа размерного распределения пылевых частиц по имеющимся экспериментальным данным лучше всех здесь рассмотренных подходит экспоненциальное распределение частиц по размерам $P(x) = 1/43.33\cdot e^{-x/43.3}$. На основе этого распределения можно верно воспроизвести все интегральные показатели, предоставляемые измерительным комплексом.

3. Задачи пылеулавливания требуют использовать классическое логнормальное распределение $P(x) = 0.563\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{lg\,x-1.63}{0.435}\right)^2}$. Его параметры вычислены методами математического программирования, что позволяет рассчитать важную для проектирования циклонов величину $D_{32} = 32{,}8$ мкм.

4. Поскольку содержание металлической и абразивной пыли в образце относится примерно как 3:2 (по массе) необходимо выполнить отдельный анализ размерного распределения частиц для указанных материальных фракций.

5. Ввиду существенной зависимости аэродинамических свойств пыли от геометрии частиц представляется необходимым осуществлять одновременно анализ таких показателей как сферичность и скругленность.

Список первоисточников

В. Страус Промышленная очистка газов / Пер. с англ. М.: Химия, 1981. 616 с.

М.Г. Зиганшин Проектирование аппаратов пылегазоочистки / М.Г. Зиганшин, А.А. Колесник, В.Н. Посохин. М.: Экопресс – 3М, 1998. 505 с.

J. Sauter Grassenbestimmung von Brennstoffteilchen // Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. 1926. Heft 279.

J. Sauter Untersuchung der von Spritzvergasern gelieten Zerstobung // Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. 1928. Heft 312.

Сферичность // https: // ru.wikipedia.org / wiki / Сферичность.

H. Wadell Volume, Shape and Roundness of Quartz Particles // J. Geology. 1935. *Vol. 43, № 3. P. 250-280*.

В.В. Адушкин, С.И. Попель, С.И. Шишаева Анализ мелкодисперсной фракции при разрушении горных пород взрывом и образовании скальных оползней // Записки Горного института. 2007. Т. 171. С. 32-38.

T. Hatch, S.P. Choate Statistical description of the size properties of non-uniform particulate substances // J. Franklin Inst. 1929. V. 207. P.369-387.

W. Kaye, J.B. McDaniel Low-Angle Laser Light Scattering – Rayleigh Factors and Depolarization Ratios // Applied Optics**.** 1974. V. 13, Issue 8. P. 1934-1937.

Е.А. Бочкарева Сравнительный анализ программ оцифровки графиков // Современные научные исследования и инновации: электронный научно-практический журнал – http://web.snauka.ru/issues/2015/11/60095.

Э.Н. Шарапова, В.Л. Дмитриев Система оцифровки графических данных // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. 2014. № 1-2. С. 166-171.

Grafula – оцифровка координат точек отсканированных графиков для переноса их в Excel: Математическое моделирование – https://mmodelling.blogspot.com/2012/07/excel.html.

M. Minoux Mathematical Programming: Theory and Algorithms. New York: John Wiley, 1986. 489 p.