Багыров Ш.Г.
Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
Гулуева К.А.
Бакинский Государственный Университет

ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СЛАБО СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

THE ABSENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF A WEAKLY COUPLED SYSTEM OF SECOND-ORDER SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Summary. We consider a system of semilinear parabolic equations with singular potentials and study the problems of the absence of non-negative global solutions of this system in a cylindrical domain, the base of which is the exterior of the ball containing the origin. A sufficient condition for the absence of global solutions is obtained. The proof is based on the test function method.

Аннотация. Рассматривается система полулинейных параболических уравнений с сингулярными потенциалами и исследуются вопросы отсутствия неотрицательных глобальных решений этой системы в цилиндрической области, основание которой есть внешность шара содержащая начало координат. Получено достаточное условие отсутствия глобальных решений. Доказательство основано на методе пробных функций.

Введение

Введем следующие обозначения

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, n \geq 3, r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$
$$B_R = \{x; |x| < R\}, B_R^{'} = \{x; |x| > R\},$$
$$B_{R_1,R_2} = \{x; R_1 < |x| < R_2\}, Q_R = B_R \times (0, +\infty),$$
$$\boldsymbol{Q_R' = B_R' \times (0, +\infty), Q_R(\rho) = Q_R' \cap \{(x,t); t + |x|^2 < 2\rho^2\}};$$

$C_{x,t}^{k,l}(Q_R')$ -множество k -раз непрерывно дифференцируемых функций по x и l раз непрерывно дифференцируемых поt.

В $Q_R^{'}$ рассмотрим следующую слабо связанную систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = div(A\nabla u) + \frac{C_1}{|x|^2} u + |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = div(A\nabla v) + \frac{C_2}{|x|^2} v + |x|^{\sigma_2} |u|^{q_2} \end{cases} \qquad (1.1)$$

с начальным условием

$$u|t = 0 = u_0(x), v|t = 0 = v_0(x), \qquad (1.2)$$

где $0 \leq u_0(x), v_0(x) \in C\left(\overline{B_R'}\right), \sigma_k > -2, q_k > 1, 0 \leq C_k < (\gamma + 1)\frac{(n-2)^2}{4}, k = 1,2, \gamma > -1,$

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), A = \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^n,\ a_{ij}(x) = \delta_{ij} + \gamma \frac{x_i x_j}{|x|^2},\ \delta_{ij}$ - символы Кронекера. Здесь

$A\nabla u = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), div(A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$

Мы будем исследовать вопрос о существовании глобального решения задачи (1.1), (1.2). Под глобальным решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать пару функций $u(x,t), v(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_R') \cap C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{Q_R'}\right)$, удовлетворяющих систему (1.1) в каждой точке Q_R' и начальное условие (1.2) при $t = 0$.

Проблемы существования и не существования глобальных решений для различного класса дифференциальных уравнений и неравенств играют важную роль в теории и приложениях, поэтому привлекают постоянное внимание математиков и им посвящены большое число работ.

В классической работе Фуджиты [1] рассматривается начальная работа

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^q, & (x,t) \in R^n \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, & x \in R^n \end{cases} \qquad (1.3)$$

и доказывается, что при $1 < q < q^* = 1 + \frac{2}{n}$ задача (1.3) не имеет положительные глобальные решения, а при $q > 1 + \frac{2}{n}$ для маленьких $u_0(x)$ существуют положительные глобальные решения. Случай $q = q^*$ исследованы в работах [2], [3] и доказано, что в этом случае тоже не существуют положительные глобальные решения. Результаты работы Фуджиты вызвали большой интерес к проблеме отсутствия глобальных решений, и они были расширены в нескольких направлениях. Обзор таких работ имеется в статье [4], в монографии [5] и в книге [6].

Одним из возможных расширений результата Фуджиты, исследовать систему уравнений реакции-диффузии типа Фуджиты, за которое и мы беремся.

В работе [7], Ескобдо и Херреро при $C_1 = C_2 = 0, \gamma = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ рассмотрели задачу (1.1), (1.2) в $R^n \times (0, +\infty)$ и доказывали, что если $q_1, q_2 > 0$, $q_1 q_2 > 1$ и $max\left(\frac{q_1+1}{q_1q_2-1}, \frac{q_2+1}{q_1q_2-1}\right) \geq \frac{n}{2}$, то рассмотренная задача не имеет неотрицательные глобальные решения. Результаты работы [7] обобщены в работах [8], [9],[10].

В представленной работе рассматривается система полулинейных параболических уравнений, но вместо оператора Лапласа берется оператор вида $div(A(x)\nabla u)$, где $A(x)$ имеет указанный выше специальный вид. Плюс к этому в наших уравнениях присутствуют младшие члены с сингулярными потенциалами. Заметим, что проблема существования глобальных решений полулинейных параболических уравнений с сингулярным потенциалом в различных областях также исследованы многими авторами (см. [11]-[15]).

Как показано в работе [16], если заменить в уравнении с сингулярным потенциалом оператор Лапласа на общий оператор вида $div(A(x)\nabla u)$, то найти точный критический показатель отсутствия глобального неотрицательного решения не удается. В представленной работе матрица $A(x)$ выбрана в специальном виде и показано как влияет константа γ на критический показатель. Используя технику пробных функций, разработанный Митидиери и Похожаевым в работах [5],[17] находим критический показатель отсутствия глобального решения.

Основной результат и его доказательство

Обозначим

$$D_k = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - \frac{C_k}{\gamma+1}}, \lambda_k^+ = -\frac{n-2}{2} + D_k, \lambda_k^- = -\frac{n-2}{2} - D_k,$$
$$\theta_1 = \frac{\sigma_1+2+q_1(\sigma_2+2)}{q_1q_2-1} - \lambda_1^+ - n, \theta_2 = \frac{\sigma_2+2+q_2(\sigma_1+2)}{q_1q_2-1} - \lambda_2^+ - n, \ k = 1{,}2.$$

Рассмотрим функции $\xi_k(x) = |x|^{\lambda_k^+} - |x|^{\lambda_k^-}$, $k = 1{,}2$. Легко проверить, что функция $\xi_k(x)$ решение уравнения

$$div(A\nabla\xi_k) + \frac{C_k}{|x|^2}\xi_k = 0 \tag{2.1}$$

и $\xi_k(x)|_{|x|=1} = 0, k = 1{,}2.$

Рассмотрим еще следующую функцию

$$\phi(x,t) = \phi_0\left(\frac{t+|x|^2}{\rho^2}\right),$$

$$\text{где } \phi_0(s) = \begin{cases} 1, при s \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2}cos\big(\pi(s-1)\big) + \frac{1}{2}\right)^{\beta}, при 1 \leq s \leq 2 \\ 0, при s \geq 2 \end{cases}$$

и $\rho > 1$, β достаточно большое число.

Теорема 2.1. Пусть $n \geq 3, q_k > 1$, $\gamma > -1, 0 \leq C_k < (\gamma+1)\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, $max\{\theta_1, \theta_2\} \geq 0$, $k = 1{,}2$. Тогда, если $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ неотрицательное решение задачи (1.1), (1.2), то $u \equiv 0, v \equiv 0$.

Доказательство: Для простоты записи возьмем $R = 1$. Пусть (u,v) нетривиальное неотрицательное решение задачи (1.1),(1.2). Умножим первое уравнение системы (1.1) на функцию $\phi(x,t)\xi_1(x)$, второе на $\phi(x,t)\xi_2(x)$ и интегрируем по частям. Тогда получим следующее:

$$\int_{Q_1'}|x|^{\sigma_1}|v|^{q_1}\phi(x,t)\xi_1(x)dxdt=-\int_{Q_1'}u\xi_1\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-$$
$$-\int_{B_1'}u_0(x)\xi_1(x)\phi(x,0)dx+\int_{Q_1'}\big(A\nabla u,\nabla(\phi\xi_1)\big)dxdt-$$
$$-\int_{\partial Q_1(\rho)}(A\nabla u,cos(n,x))\phi(x,t)\xi_1(x)d\eta-\int_{Q_1'}\frac{C_1}{|x|^2}u\phi\xi_1dxdt\leq$$
$$-\int_{Q_1'}u\xi_1\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-\int_{Q_1'}udiv\big(A\nabla(\phi\xi_1)\big)dxdt-$$
$$`-\int_{Q_1'}\frac{C_1}{|x|^2}u\phi\xi_1dxdt-\int_{\partial Q_1(\rho)}(A\nabla u,cos(n,x))\,\phi\xi_1d\eta+$$
$$\int_{\partial Q_1(\rho)}u\big(A\,cos(n,x)\,,\nabla(\phi\xi_1)\big)d\eta-\int_{B_1'}u_0(x)\phi(x,0)\xi_1\,(x)dx, \tag{2.2}$$

где $d\eta$ элемент поверхности, $cos(n,x)=(cos(n,x_1)\,,\dots,cos(n,x_n))$, n единичный вектор внешней нормали. Поскольку, все функции в последнем интеграле (2.2) неотрицательные, то сам интеграл тоже неотрицателен.

Очевидно, что

$$\int_{\partial Q_1(\rho)}(A\nabla u,cos(n,x))\phi\xi_1d\eta=0.$$

Это потому, что при $|x|=1$ $\xi_1\equiv 0$, при $t+|x|^2=2\rho^2$ $\phi\equiv 0$, а при $t=0$ $cos(n,x)\equiv 0$.

Покажем, что второй поверхностный интеграл в (2.2) неотрицателен.

$$\int_{\partial Q_1(\rho)}u\big(A\,cos(n,x)\,,\nabla(\phi\xi_1)\big)d\eta=\int_{\partial Q_1(\rho)}u\big(A\,cos(n,x)\,,(\nabla\phi\xi_1+\phi\nabla\xi_1)\big)d\eta=$$
$$=\int_{\partial Q_1(\rho)}u(A\,cos(n,x)\,,\nabla\phi\xi_1)d\eta+\int_{\partial Q_1(\rho)}u(A\,cos(n,x)\,,\nabla\xi_1\phi)d\eta=$$
$$=\int_{\partial Q_1(\rho)}u(A\,cos(n,x)\,,\nabla\xi_1\phi)d\eta=\int_{\partial Q_1(\rho)}u\phi\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,cos\big(n,x_j\big)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_i}d\eta=$$
$$=-(1+\gamma)\int_{|x|=1}u\phi\frac{\partial\xi_1}{dr}d\eta=0.$$

Это потому, что при $|x|=1$ $u\geq 0$, $\phi\geq 0$, $\frac{\partial\xi_1}{\partial r}\geq 0$. Обозначая интеграл в левой части (2.2) через G_1, в итоге получим следующее

$$G_1\leq-\int_{Q_1'}u\xi_1\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-\int_{Q_1'}udiv\big(A\nabla(\phi\xi_1)\big)dxdt-$$
$$-\int_{Q_1'}\frac{C_1}{|x|^2}u\varphi\xi_1dxdt=-\int_{Q_1'}u\xi_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt-\int_{Q_1'}u\xi_1div(A\nabla\varphi)dxdt-$$
$$-\int_{Q_1'}u(\nabla\phi,A\nabla\xi_1)dxdt-\int_{Q_1'}u\phi\left(div(A\nabla\xi_1)+\frac{C_1}{|x|^2}\xi_1\right)dxdt=$$
$$=-\int_{Q_1'}u\xi_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt-2\int_{Q_1'}u(A\nabla\varphi,\nabla\xi_1)dxdt-$$
$$-\int_{Q_1'}u\xi_1div(A\nabla\phi)dxdt. \tag{2.3}$$

Здесь мы воспользовались тем, что ξ_1 удовлетворяет уравнение (2.1) и $(\nabla\phi,A\nabla\xi_1)=(A\nabla\phi,\nabla\xi_1)$.

Аналогично, умножая второе уравнение системы (1.1) на функции $\phi(x,t)\xi_2(x)$ можем получить, что

$$G_2\equiv\int_{Q_1'}|x|^{\sigma_2}|u|^{q_2}\phi(x,t)\,\xi_2dxdt\leq$$
$$\leq-\int_{Q_1'}v\xi_2\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-2\int_{Q_1'}v(A\nabla\phi,\nabla\xi_2)dxdt-\int_{Q_1'}v\xi_2div(A\nabla\phi)dxdt. \tag{2.4}$$

Используя неравенство Гельдера оценим правые части (2.3), (2.4).

$$G_1 \le \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_2}|u|^{q_2}\phi\,\xi_2 dxdt\right)^{\frac{1}{q_2}} \left[\left(\int_{Q_1'} \frac{\xi_1^{q_2'}\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|^{q_2'}}{\xi_2^{q_2'-1}|x|^{\sigma_2(q_2'-1)}\phi^{q_2'-1}}dxdt\right)^{\frac{1}{q_2'}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{Q_1'} \frac{|2(A\nabla\phi,\nabla\xi_1)+\xi_1 div(A\nabla\phi)|^{q_2'}}{\xi_2^{q_2'-1}|x|^{\sigma_2(q_2'-1)}\phi^{q_2'-1}}dxdt\right)^{\frac{1}{q_2'}}\right] \le$$

$$\le CG_2^{\frac{1}{q_2}}\left[I_2^{\frac{1}{q_2'}}+J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right], \tag{2.5}$$

$$G_2 \le \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_1}|v|^{q_1}\varphi\xi_1 dxdt\right)^{\frac{1}{q_1}} \left[\left(\int_{Q_1'} \frac{\xi_2^{q_1'}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{q_1'}}{\xi_1^{q_1'-1}|x|^{\sigma_1(q_1'-1)}\varphi^{q_1'-1}}dxdt\right)^{\frac{1}{q_1'}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{Q_1'} \frac{|2(A\nabla\phi,\nabla\xi_2)+\xi_2 div(A\nabla\phi)|^{q_1'}}{\xi_1^{q_1'-1}|x|^{\sigma_1(q_1'-1)}\phi^{q_1'-1}}dxdt\right)^{\frac{1}{q_1'}}\right] \le$$

$$\le CG_1^{\frac{1}{q_1}}\left[I_1^{\frac{1}{q_1'}}+J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right], \tag{2.6}$$

где через I_2, J_2 обозначены первое и второе слагаемое в квадратной скобке в (2.5), а через I_1, J_1 первое и второе слагаемое в квадратной скобке в (2.6).

Тогда подставляя (2.6) в (2.5) и (2.5) в (2.6) получим следующие соотношения

$$G_1 \le CG_1^{\frac{1}{q_1q_2}}\left[I_1^{\frac{1}{q_1'}}+J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right]^{\frac{1}{q_2}}\left[I_2^{\frac{1}{q_2'}}+J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right]$$

$$G_2 \le CG_2^{\frac{1}{q_1q_2}}\left[I_1^{\frac{1}{q_1'}}+J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right]\left[I_2^{\frac{1}{q_2'}}+J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right]^{\frac{1}{q_1}}.$$

Отсюда имеем, что

$$G_1 \le C\left[I_1^{\frac{1}{q_1'}}+J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right]^{\frac{q_1}{q_1q_2-1}}\left[I_2^{\frac{1}{q_2'}}+J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right]^{\frac{q_1q_2}{q_1q_2-1}} \tag{2.7}$$

$$G_2 \le C\left[I_1^{\frac{1}{q_1'}}+J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right]^{\frac{q_1q_2}{q_1q_2-1}}\left[I_2^{\frac{1}{q_2'}}+J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right]^{\frac{q_2}{q_1q_2-1}}. \tag{2.8}$$

Сделав замены $t=\rho^2\tau, x=\rho y, s=\frac{t+|x|^2}{\rho^2}$, $\varphi_0(\tau,y)=\varphi(\rho^2\tau,\rho y)=\varphi_0(\tau+|y|^2)$ оценим интегралы I_1, I_2, J_1, J_2.

$$I_1 \equiv \int_{Q_1'} \frac{\xi_2^{q_1'} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|^{q_1'}}{\xi_1^{q_1'-1} |x|^{\sigma_1(q_1'-1)} \varphi^{q_1'-1}} dxdt = \int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} \frac{|x|^{\lambda_2^+ q_1'} (1-|x|^{-2D_2})^{q_1'} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|^{q_1'}}{|x|^{\lambda_1^+(q_1'-1)} (1-|x|^{-2D_1})^{q_1'-1} |x|^{\sigma_1(q_1'-1)} \varphi^{q_1'-1}} dxdt =$$

$$= c\rho^{-2q_1'+2+n+\lambda_2^+ q_1' - \lambda_1^+(q_1'-1) - \sigma_1(q_1'-1)} \int_{1<\tau+|y|^2<2} \frac{\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right|^{q_1'}}{|y|^{(q_1'-1)(\lambda_1^+ + \sigma_1)} \varphi_0^{q_1'-1}} dyd\tau \le$$

$$c\rho^{-(\sigma_1+2)(q_1'-1)+\lambda_2^+ q' - \lambda_1^+(q_1'-1)+n} \tilde{I}_1, \tag{2.9}$$

где через $\tilde{I}_1$ обозначен последний интеграл в (2.9).

$$J_1 = \int_{Q_1} \frac{|2(A\nabla\phi, \nabla\xi_2)\phi + \xi_2 div(A\nabla\phi)|^{q_1'}}{\xi_1^{q_1'-1} |x|^{\sigma_1(q_1'-1)} \phi^{q_1'-1}} dxdt =$$

$$= \int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} \frac{\left|2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} \frac{2x_j x_i}{\rho^2} \left(\lambda_2^+ |x|^{\lambda_2^+ - 2} - \lambda_2^- |x|^{\lambda_2^+ - 2}\right)\varphi + \xi_2 \sum_{i,j=1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} \frac{2x_j}{\rho^2}\right)\right|^{q_1'}}{\xi_1^{q_1'-1} |x|^{\sigma_1(q_1'-1)} \varphi^{q_1'-1}} dxdt =$$

$$= \int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} \frac{\rho^{-2q_1'} \left|4\frac{\partial \phi_0}{\partial s} |x|^{\lambda_2^+} (\lambda_2^+ - \lambda_2^- |x|^{-2D_2})\phi_0 + 2(1+\gamma)\xi_2 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial s} + 2\frac{|x|^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)\right|^{q_1'}}{|x|^{\lambda_1^t(q_1'-1)+\sigma_1(q_1'-1)} (1-|x|^{-2D_1})^{q_1'-1} \phi_0^{q'-1}} dxdt \le$$

$$\le \rho^{-2q_1'+\lambda_2^+ q_1' + n + 2 - \lambda_1^+(q_1'-1) - \sigma_1(q_1'-1)} \times$$

$$\times \int_{1<\tau+|y|^2<2} \frac{\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial s} |y|^{\lambda_2^+} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial s^2} |y|^{\lambda_2^+ + 2}\right|^{q_1'}}{|y|^{(\lambda_1^+ + \sigma_1)(q_1'-1)} \varphi_0^{q_1'-1}} dyd\tau \le$$

$$\le \rho^{-(\sigma_1+2)(q_1'-1)+\lambda_2^+ q_1' - \lambda_1^+(q_1'-1)+n} \tilde{J}_1, \tag{2.10}$$

где через $\tilde{J}_1$обозначен последний интеграл в этом равенстве.
Аналогично можем получить, что

$$I_2 \le C\rho^{-(\sigma_2+2)(q_2'-1)+\lambda_1^+ q_2' - \lambda_2^+(q_2'-1)+n} \tilde{I}_2, \tag{2.11}$$

$$J_2 \le C\rho^{-(\sigma_2+2)(q_2'-1)+\lambda_1^+ q_2' - \lambda_2^+(q_2'-1)+n} \tilde{J}_2, \tag{2.12}$$

где

$$\tilde{I}_2 = \int_{1<\tau+|y|^2<2} \frac{\left|\frac{\partial \phi_0}{\partial s}\right|^{q_2'}}{|y|^{(\lambda_2^+ + \sigma_2)(q_2'-1)} \phi_0^{q_2'-1}} dyd\tau ,$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{1<\tau+|y|^2<2} \frac{\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial s} |y|^{\lambda_2^+} + |y|^{\lambda_2^+ + 2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial s^2}\right|^{q_2'}}{|y|^{(\lambda_2^+ + \sigma_2)(q_2'-1)} \varphi_0^{q_2'-1}} dyd\tau$$

Известно , что если взять β достаточно большое положительное число, то интегралы $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2$будут ограниченными(см.[5]).

В итоге используя (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) из (2.7), (2.8) получим, что

$$G_1 \le C\rho^{\left(-(\sigma_1+2)\frac{1}{q_1} + \lambda_2^t - \lambda_1^t \frac{1}{q_1} - (\sigma_2+2)(q_2'-1) + \lambda_1^t q_2' - \lambda_2^t (q_2'-1) + n\left(\frac{1}{q_1'}+1\right)\right)\frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 - 1}} =$$

$$= C\rho^{-\theta_1} \tag{2.13}$$

$$G_2 \le C\rho^{\left(-(\sigma_2+2)\frac{1}{q_2} + \lambda_1^+ - \lambda_2^+ \frac{1}{q_2} - (\sigma_1+2)(q_1'-1) + \lambda_2^+ q_1' - \lambda_1^+(q_1'-1) + n\left(\frac{1}{q_2'}+1\right)\right)\frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 - 1}} = C\rho^{-\theta_2}. \tag{2.14}$$

Пусть $max(\theta_1, \theta_2) > 0$. Например, пусть $max(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 > 0$. Тогда переходя к пределу при $\rho \to +\infty$ из (2.13) поучим, что

$$\int_{Q_1'} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt \le 0$$

Отсюда следует, что $v \equiv 0$. Тогда из второго уравнения системы (1.1) получаем, что и $u \equiv 0$. Аналогично, при $max(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 > 0$ из (2.14) при $\rho \to +\infty$ следует, что $u \equiv 0$ и соответственно из первого уравнения системы получается, что $v \equiv 0$.

Пусть теперь $max(\theta_1, \theta_2) = 0$. К примеру, возьмем $\theta_1 = 0$. Тогда из (2.13) следует, что

$$\int_{Q_1'} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt \leq C. \tag{2.15}$$

Отсюда и из свойства определенного интеграла имеем, что

$$\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt \to 0 \text{ при } \rho \to +\infty. \tag{2.16}$$

Используя (2.6) в (2.5) получим следующие:

$$G_1 \leq \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_2} |u|^{q_2} \phi \xi_2 dxdt\right)^{\frac{1}{q_2}} \left[I_2^{\frac{1}{q_2'}} + J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right] \leq$$

$$\leq \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \varphi \xi_1 dxdt\right)^{\frac{1}{q_1 q_2}} \left[I_1^{\frac{1}{q_1'}} + J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right]^{\frac{1}{q_2}} \left[I_2^{\frac{1}{q_2'}} + J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right]$$

Возведя каждую сторону в степень $\frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 - 1}$ и используя (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) из этого неравенства получим , что

$$G_1^{\frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 - 1}} \leq \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt\right)^{\frac{1}{q_1 q_2}} \left[I_1^{\frac{1}{q_1'}} + J_1^{\frac{1}{q_1'}}\right]^{\frac{q_1}{q_1 q_2 - 1}} \left[I_2^{\frac{1}{q_2'}} + J_2^{\frac{1}{q_2'}}\right]^{\frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 - 1}} \leq$$

$$\leq C \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt\right)^{\frac{1}{q_1 q_2 - 1}} \rho^{-\theta_1}$$

Отсюда учитывая , что $\theta_1 = 0$ получаем , что

$$G \leq C \left(\int_{\rho^2<t+|x|^2<2\rho^2} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt\right)^{\frac{1}{q_1 q_2}} \tag{2.17}$$

Переходя к пределу при $\rho \to +\infty$ в (2.17) и используя (2.16) получим , что

$$\int_{Q_1'} |x|^{\sigma_1} |v|^{q_1} \xi_1 dxdt \leq 0.$$

Это значит, что $v \equiv 0$. Тогда из второго уравнения системы (1.1) получим, что и $u \equiv 0$. Если $max(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 = 0$, то аналогично получим, что $u \equiv 0$, $v \equiv 0$. Этим теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujita H. On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, Sect. I, 13, 1966, p.109-124.
2. Hayakawa K. On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations, Proc. Japan. Acad. 49, 1973, p.503-505.
3. Kobayashi K., Siaro T., Tanaka H. On the blowing up problem of semi linear heat equations // J. Math. Soc. Japan, 29, 1977, p.407-424.
4. Levine H.A. The role of critical exponents in blowup theorems // SIAM Review, 32.2, 1990, p.262-288.
5. Митидиеры Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. мат. ин-та. им. Стеклова РАН, 2001, т.234, с.9-234.
6. Самарский А.А., Галактионов В.А. Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.
7. M. Escobedo, M.A. Herrero, Boundedness and blow up for a semilinear reaction diffusion system, J. Di_erential Equations, 89 (1991), 176-202.
8. Gabriella Caristi, Existence and nonexistence of global solutions of degenerate and singular parabolic system, Abstr. Appl. Anal., 5(2000), no. 4, 265-284
9. K. Mochizuki, Q. Huang, Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Methods Appl. Anal., 5 (1998), 109-124.
10. Y. Uda, The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations, Z. Angew. Math. Phys. 46 (1995), no. 3, 366-383.
11. P. Baras and J. Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans. Amer. Math. Soc. 284(1), (1984), 121-139.
12. Лаптев Г.Г., Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств .// Труды.

Математического института им. В.А. Стеклова 2001, вып. 232, с.223-235

13. R. Suzuki; Existence and nonexistence of global solutions to quasilinear parabolic equations with convection, Hokkaido Math. J., 27 (1) (1998), 147-196.

14. C. P. Wang, S. N. Zheng; Critical Fujita exponents of degenerate and singular parabolic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 136 (2) (2006), 415-430.

15. L. Dupaigne, A nonlinear elliptic PDE with the inverse square potential, J. d'Analyse Math´ematique, 86, (2002), 359-398.

16. Vladimir Kondratiev, Vitali Liskevich, Zeev Sobol, Positive solutions to semi-linear and quasi-linear elliptic equations on unbounded domains // Handbook of di_erential equations: Stationary partial differential equations, volume 6, 2008, pages 177-267.

17. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в R^n // Труды МИАН, 1999, т.227, с.192-222.