



#3 (43), 2019 część 1

Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe

(Warszawa, Polska)

Czasopismo jest zarejestrowane i publikowane w Polsce. W czasopiśmie publikowane są artykuły ze wszystkich dziedzin naukowych. Czasopismo publikowane jest w języku polskim, angielskim, niemieckim i rosyjskim.

Artykuły przyjmowane są do dnia 30 każdego miesiąca.

Częstotliwość: 12 wydań rocznie.

Format - A4, kolorowy druk

Wszystkie artykuły są recenzowane

Każdy autor otrzymuje jeden bezpłatny egzemplarz czasopisma.

Bezpłatny dostęp do wersji elektronicznej czasopisma.

Zespół redakcyjny

Redaktor naczelny - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

Rada naukowa

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

#3 (43), 2019 part 1

East European Scientific Journal

(Warsaw, Poland)

The journal is registered and published in Poland. The journal is registered and published in Poland.

Articles in all spheres of sciences are published in the

journal. Journal is published in **English, German, Polish and Russian.**

Articles are accepted till the 30th day of each month.

Periodicity: 12 issues per year.

Format - A4, color printing

All articles are reviewed

Each author receives one free printed copy of the journal

Free access to the electronic version of journal

Editorial

Editor in chief - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

The scientific council

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

**Dawid Kowalik (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
**Peter Clarkwood(University College
London)**
Igor Dziedzic (Polska Akademia Nauk)
**Alexander Klimek (Polska Akademia
Nauk)**
**Alexander Rogowski (Uniwersytet
Jagielloński)**
Kehan Schreiner(Hebrew University)
**Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
**Mikołaj Żukowski (Uniwersytet
Warszawski)**
**Mateusz Marszałek (Uniwersytet
Jagielloński)**
**Szymon Matysiak (Polska Akademia
Nauk)**
**Michał Niewiadomski (Instytut
Stosunków Międzynarodowych)**
Redaktor naczelny - Adam Barczuk

1000 kopii.

**Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie
85/21, 02-001 Warszawa, Polska»**

**Wschodnioeuropejskie Czasopismo
Naukowe**

Aleje Jerozolimskie 85/21, 02-001
Warszawa, Polska

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com/>

**Dawid Kowalik (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
**Peter Clarkwood(University College
London)**
Igor Dziedzic (Polska Akademia Nauk)
**Alexander Klimek (Polska Akademia
Nauk)**
**Alexander Rogowski (Uniwersytet
Jagielloński)**
Kehan Schreiner(Hebrew University)
**Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
**Mikołaj Żukowski (Uniwersytet
Warszawski)**
**Mateusz Marszałek (Uniwersytet
Jagielloński)**
**Szymon Matysiak (Polska Akademia
Nauk)**
**Michał Niewiadomski (Instytut
Stosunków Międzynarodowych)**
Editor in chief - Adam Barczuk

1000 copies.

**Printed in the "Jerozolimskie 85/21, 02-
001 Warsaw, Poland»**

East European Scientific Journal

Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warsaw, Po-
land

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com/>

СОДЕРЖАНИЕ

АРХИТЕКТУРА

Бармашина Л.М.

ПАРАМЕТРИЧНА ПАРАДИГМА УРБАНІЗМУ4

Краснослободцева О.В.

СТРУКТУРИЗАЦІЯ І КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ТА ЯВИЩ РЕКРЕАЦІЙНИХ ТЕРИТОРІЙ.

АНАЛІЗ ВІТЧИЗНЯНОГО ТА ЗАРУБІЖНОГО ДОСВІДУ9

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Алексеев К.В., Юдина Д.В., Алексеев В.К., Дворник Е.В.,

Клочкова Э.С., Скепка Х.И., Узорова А.В., Евдокимова Н.Г.

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ВОПРОИЗВЕДЕННОГО ЛЕКАРСТВЕННОГО

ПРЕПАРАТА С ПРОТИВООПУХОЛЕВЫМ ДЕЙСТВИЕМ.15

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Гуля А.С., Остроухов Н.Н.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ КОСМОПЛАН КАК ОСНОВА БЕЗРЕАКТИВНОЙ КОСМОНАВТИКИ18

Кокотов Ю.А.

СООТВЕТСТВИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВ.

МЕЖАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ СООТВЕТСТВИЯ.....22

Лесных Ю.И.

МОДЕЛЬ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТАЛЛА.....32

Мехтиев Р.К.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНОРОДНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И

ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ КОМПОЗИТА40

Потепалова А.Ю., Федоренко С. Э.

АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ.....48

Садыгов М.А.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ53

Сармасов С.Н., Рагимов Р.Ш., Исмаилова Р.Н.³

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ $Pb_{1-x}Sn_xTe$ ВБЛИЗИ ИНВЕРСИИ ЗОН67

Айтенова Г.М., Абдикаликова Г.А., Сартабанов Ж.А.

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ70

АРХИТЕКТУРА

Бармашина Людмила Миколаївна,
кандидат архітектури, старший науковий співробітник,
доцент кафедри архітектури факультету архітектури, будівництва та дизайну,
Національний авіаційний університет, Україна

ПАРАМЕТРИЧНА ПАРАДИГМА УРБАНІЗМУ

Barmashina Ludmila,
PhD in Architecture, Associate Professor, Senior Research Worker,
Associate Professor of Department of Architecture of Academic and Research
Institute of Airports National Aviation University

PARAMETRIC PARADIGM OF URBANISM

Анотація: стаття присвячена розгляду особливостей параметризму як авангардного напрямку в сучасній архітектурі та містобудуванні. Цей напрям засновано на інформаційних технологіях і нових уявленнях про архітектурну форму і простір. Він трансформує існуючі ідеї та концепції за рахунок застосування нових підходів, програм, засобів, методів, інструментів та матеріалів. Таким чином формується новий образ мислення сучасних архітекторів. Серед характерних закономірностей параметризму слід відзначити цілісну теоретичну платформу та новий погляд на взаємозв'язки містобудівного простору, архітектурної форми і функції. Це обумовлює нове трактування класичних професійних категорій, зокрема масштабності та тектоніки.

Annotation: the article is devoted to the consideration of the features of parametrisation as an avant-garde trend in modern architecture and urban planning. This direction is based on information technologies and new ideas about the architectural form and space. It transforms existing ideas and concepts through the use of new approaches, programs, tools, methods, tools and materials. Thus, a new way of thinking of modern architects is formed. Among the characteristic regularities of parametrisation, it should be noted a holistic theoretical platform and a new look at the interrelations of urban space, architectural form and function. This leads to a new interpretation of the classical professional categories, in particular, the scale and tectonics.

Ключові слова: параметричний урбанізм, міський простір, багатофункціональність, цифрова тектоніка, динамічна архітектура, комп'ютерні технології.

Key words: parametric urbanism, urban space, bagatofunctionalism, digital tectonics, dynamic architecture, computer technologies.

Постановка проблеми (актуальність). Наразі архітектура знаходиться в центрі низки прогресивних змін, зокрема дигітальної модифікації цієї сфери діяльності із одночасним пристосуванням архітектурного та міського середовища до нової соціально-економічної епохи масового серійного виробництва. Авангардистська урбаністична архітектура потребує постійного ускладнення організації та при цьому забезпечення суспільних потреб. Завдання полягає в тому, щоб створити архітектурний міський стиль, який передбачає створення складних, поліцентричних, багатопланових міських і архітектурних просторів, які безперервно змінюються. Міське та архітектурне середовище таким чином може отримати динамічні вбудовані можливості, які дозволять цьому середовищу переформуватися і пристосовуватися до існуючого довілля.

Одним із суттєвих напрямків розвитку є тенденція до створення багатофункціональних архітектурних просторів та об'єктів із певною перевагою утилітарних і економічних чинників над естетичними. При цьому можна стверджувати, що багатофункціональність, як правило, потребує ексклюзивності. Такий тип мислення передбачає формулювання нових принципів створення архітектурних

об'єктів та міських просторів, що в свою чергу потребує застосування нового інструментарію. Одним із інструментів є параметричне моделювання [1].

Аналіз досліджень і публікацій. Параметризм, представлений у теоретичних роботах Патріка Шумахера як новий глобальний стиль архітектури, є одним із напрямів сучасної архітектурної практики, який активно розвивається. Це означає спосіб моделювання архітектурної форми на основі її математичної інтерпретації в комп'ютерних програмах. Зміна параметрів, присутніх у математичних виразах, впливає на геометрію форм. Така модель добре суміщується з даними передпроектного аналізу, вираженими в цифровому вигляді. Полегшується процес роботи зі складними поверхнями, а саме їх трансформація з метою досягнення оптимальних значень техніко-економічних показників проекту. Параметризм Шумахера, безумовно, базується на описаному способі роботи, але як оформлене напрямком проектною діяльністю він орієнтований на широке вивчення самої природи змін, що відбуваються в архітектурній діяльності [1,2].

Метою статті є розгляд особливостей параметричного урбанізму, цифрової тектоніки, динаміч-

ної архітектури як новітніх напрямів у сучасній архітектурі та містобудуванні, заснованих на інформаційних технологіях.

Викладення основного матеріалу. Головними складовими самого поняття «параметризм» є параметри та вимірювання, порядок і взаємодія, а також встановлення співвідношень між будівлями, оточенням і людським фактором. Створення теоретичної бази параметризму вимагає зокрема розгляду питань тектоніки як однієї з основних якостей архітектурних об'єктів. Сучасна архітектура з її надскладною пластикою та різноманітними формами великих просторів яскраво відтворює тектонічні властивості конструкцій і матеріалів, з яких вони зведені. Якщо тектоніка в традиційному розумінні - це концепція, що визначає взаємозв'язок між формою та її структурними властивостями, то архітектурна тектоніка - художнє вираження структурних закономірностей певного містобудівного простору чи конструктивної системи споруди. Ключовим є поняття «художнє вираження». Іноді його замінюють словом «артикуляція», підкреслюючи архітектурну грамотність, чітке виявлення конструктивного рішення як необхідні умови тектонічності. Сучасна інтерпретація надає архітектоніці більш широкого трактування, включаючи цифрове (автоматизоване) виробництво та конструювання, морфогенез та біоімітацію (біоніку), які розглядаються як інтегральні частини цифрової тектоніки. За П. Шумахером «дигітальну тектоніку слід розуміти як архітектурний вибір технічно мотивованих інженерних рішень для виконання завдань архітектурної артикуляції» [2]. Вирішення цих завдань має базуватися на виконанні соціальних функцій будь-якого містобудівного об'єкту, що означає забезпечення замовлення суспільства на відповідність соціальному змісту, а саме комунікаційним функціям. Цю стратегію можна назвати тектонічною артикуляцією. Відповідно проектна тактика може мати наступний алгоритм: просторове впорядкування, визначення технічних характеристик матеріалізації об'єкта, вибір архітектурної мови. Сучасна авангардистська архітектура і урбанізм пристосовуються до цього соціального виклику через бурний розвиток параметричних методів проектування. При цьому параметри матеріальних об'єктів навколишнього середовища та параметри користувача / спостерігача, тобто людини як біологічного об'єкту

мають бути об'єднані в єдину параметричну систему. Це насправді означає глобальну конвергенцію*, яка обґрунтовує появу нового стилю – параметричного урбанізму або міського параметризму. Пов'язана система повинна підкреслювати початкове диференціювання. Таким чином може бути досягнута більш багата архітектурна артикуляція із максимально доступною орієнтацією в просторі за рахунок візуальної інформації [2].

Порівняння традиційного процесу проектування і архітектурної творчості, заснованої на цифровій тектоніці та принципах параметризму, показує, що ці процеси різноспрямовані. Перший, традиційний, спрямований на генерацію форм від загального до конкретного. Другий розвивається зсередини назовні, розкриваючи та підтверджуючи класичне гасло про поєднання користі, міцності і краси в архітектурних формах.

Найважливіші положення параметричного урбанізму не суперечать концепціям гармонійного поєднання архітектури з природним середовищем при одночасному функціонуванні як середовища віртуального, інформаційного. Визначення параметричної архітектури та урбанізму більше належить до методології проектування, ніж до стилізованої прямої. Містобудівні об'єкти можуть бути настільки складними, що їх неможливо створити традиційними засобами. Завдяки параметричним технологіям можливо оперувати великими обсягами даних, при цьому роль архітектора залишається головною, оскільки саме він встановлює параметри, що визначають місце розміщення, функції об'єкту чи простору тощо [3]. У сфері параметричної архітектури та урбанізму наразі використовують нові сучасні програми. Найбільшого поширення набула програма Grasshopper. Вона вийшла на світовий ринок і дуже успішно використовується найвідомішими архітектурними компаніями: Zaha Hadid architects, 505 studio, UNstudio і ще багатьох. Grasshopper дозволяє не тільки створювати незвичайні об'єкти, але і моделювати образ в реальному часі з різних абстрактних елементів на основі певних алгоритмів. Алгоритм - це певна логічна послідовність, яка вказує програмі шлях обробки введених параметрів [4].

На рис.1 показано результат спільного моделювання людини і машини (архітектора і комп'ютера).

* Конвергенція - наближення, злиття будь-яких ознак і елементів в незалежних одне від одного явищах

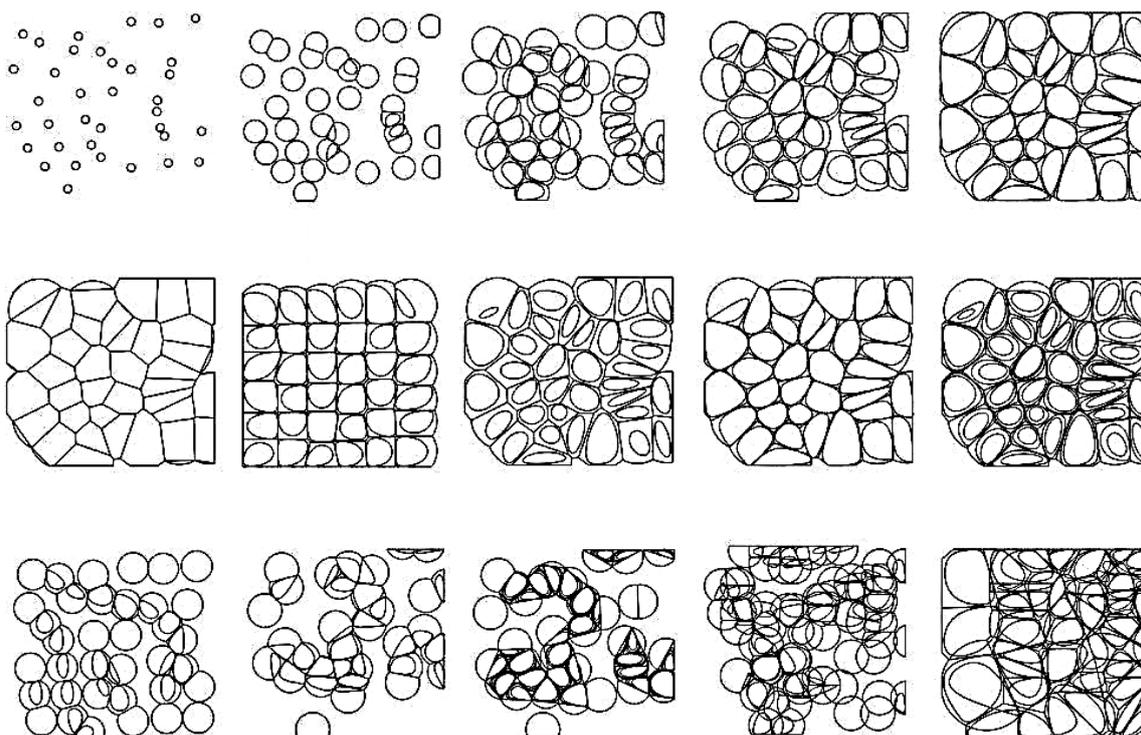


Рис.1. Алгоритмічні побудови

Нові сучасні програми, такі як Rhino та Grasshopper, розширюють можливості при створенні складних містобудівних просторів, форм та структур. Вони дозволяють не просто моделювати форму, але й розробляти математичні алгоритми - логічні умови, які сприяють знаходженню оптимальних рішень будь-яких завдань у автоматичному режимі. Алгоритм складається з вихідних даних або параметрів і послідовності дій з ними. В результаті генеруються як геометрія, так і інша супутня інформація, а саме силуети, об'єми, площі, розміри тощо. При цьому в будь-який момент можливо змінити вихідні дані, і вся модель перебудовується [5].

Методами параметричної (алгоритмічної) генерації, зокрема у сфері урбанізму можливо більш якісно опрацьовувати великі площі територій, розглядаючи багато різних варіантів сценаріїв розвитку міста, використовуючи завжди актуальні дані. Система, що має можливість до адаптації з урахуванням всіх необхідних параметрів, по суті є інструментом для найбільш гнучкого і ефективного

підходу до проектування. Змінні вимоги до архітектурно-просторової моделі міського середовища, внесені як алгоритм у загальну інформаційну систему планування і управління міським господарством, можуть стати ефективним інструментом в області теорії і практики містобудування.

Параметричний підхід як сучасний напрям у містобудуванні та архітектурі передбачає, що конструкція, функціональне наповнення і форма будівлі або міського середовища залежать від різних факторів. Вони трансформуються в просторову модель, розроблену на основі комп'ютерних алгоритмів. Як фактори можуть бути використані характер рельєфу, конструктивні навантаження, освітленість, інтенсивність потоку транспорту та людей і багато іншого. Коли розроблюється алгоритм генерації форми, до нього включаються всі дані, взяті із зовнішнього середовища і таким чином створюється архітектура, яка гармонійно вписується в навколишнє природне середовище. На рис.2 представлено приклади урбаністичних утворень, розроблених за допомогою програми Grasshopper.

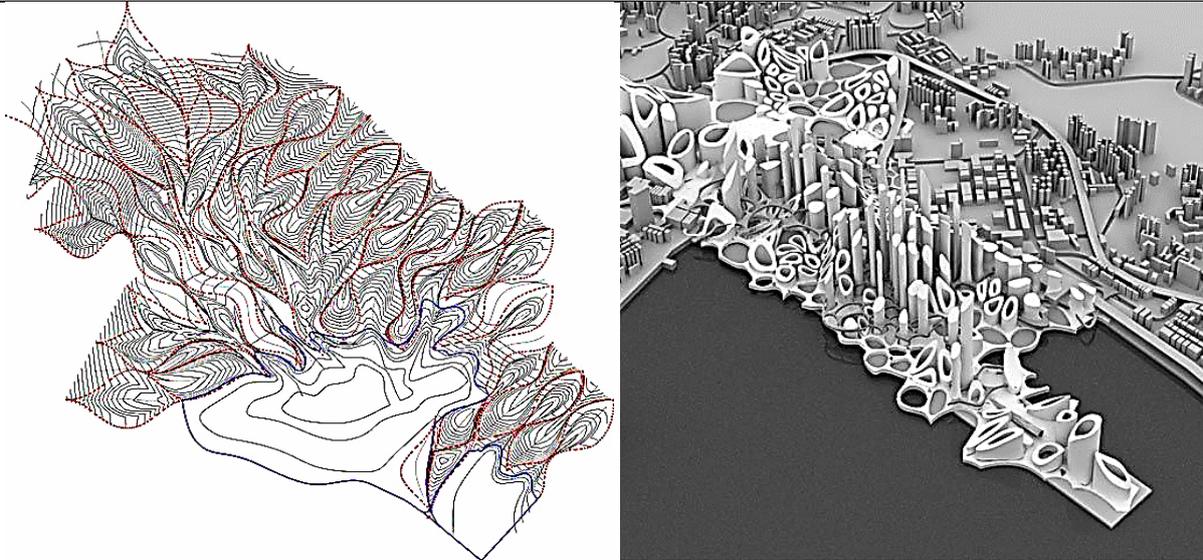


Рис.2. Урбаністичні утворення

Перспективний напрям, тісно пов'язаний із параметризмом - це динамічна архітектура. Динаміка - характеристика, яка притаманна розробкам майстерні З. Хадід (Zaha Hadid architects). П. Шумахер, який наразі є керівником цієї майстерні, стверджує, що динаміка як якісна характеристика від самого початку властива параметричним містобудівним просторам і архітектурним формам. Динамічна складова параметризму має дві сторони. Йдеться про потенційну динаміку, яка втілюється в архітектурному образі, і реальну динаміку, тобто трансформаціях, які містобудівний простір або архітектурний об'єкт можуть зазнавати залежно від стану доквілля і процесів, що відбуваються всередині.

Ще одним питанням, пов'язаним з динамічністю, мінливістю параметричних архітектурних образів є внесення віртуальних просторів і інформаційних елементів у реальні об'єкти. Віртуальні та реальні містобудівні об'єкти існують одночасно, перетинаються і формують при цьому новий тип естетичної свідомості, нову цілісність, образність, притаманні параметричній архітектурі та урбанізму. Реальна динаміка параметричних об'єктів пе-

редбачає змінювані простори, роботизовані екосистеми, матеріали, що реагують на зміни в навколишньому середовищі тощо. Це передбачає можливість формування архітектури, що розвивається в часі, створення морфогенетичних структур, де кожен елемент зможе автономно змінювати форму і відповідні властивості середовища, наприклад освітленість, температуру, колір, фактуру тощо.

Практичне втілення в життя міського параметризма та динамічної архітектури почалося у майстерні Zaha Hadid architects. Свого часу Заха Хадід із своїми соратниками розпочала активні пошуки в сфері параметричного урбанізму. Майстерня змогла виграти ряд міжнародних конкурсів з розробки генеральних планів зі схемами, які втілюють ключові особливості параметризма. Першим з ряду радикальних генеральних планів, розроблених у 2001-2003 рр.. майстернею Zaha Hadid architects на основі параметричного урбанізму, був проект нового міського ділового району змішаного використання у Сінгапурі. Використано асоціативний ряд Мережа - Тканина - Будинки. На рис.3 показані проектні розробки.

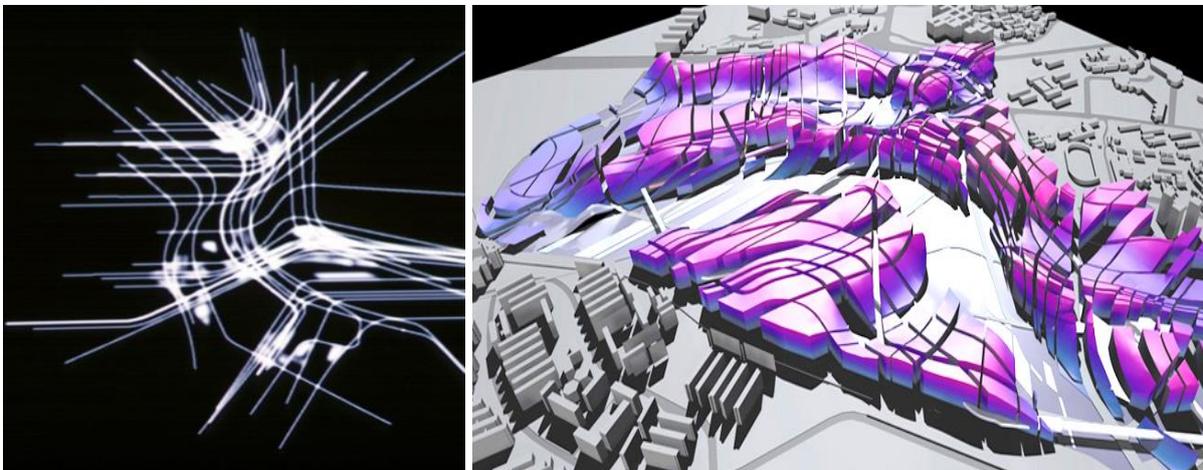


Рис.3. Проектні пропозиції для Сінгапуру

Найбільш масштабною роботою майстерні Zaha Hadid architects є генеральний план району Картал-Пендік, розроблений для турецької столиці в 2006 році. Задіяна міська територія змішаного використання - 55 гектар з 6 мільйонами квадратних метрів для нового будівництва, що включає всі інфраструктурні компоненти міста. Ділянка позбавляється від промислових зон і обрамлена мережею

передмість. Проектом запропоновано новий міський пейзаж. План включає широкий кар'єр, який є найбільшим пунктом системи парків у межах міста. Ритмічний потік міської забудови дає відчуття органічної єдності. На рис.4 наведено відповідні пошукові розробки.

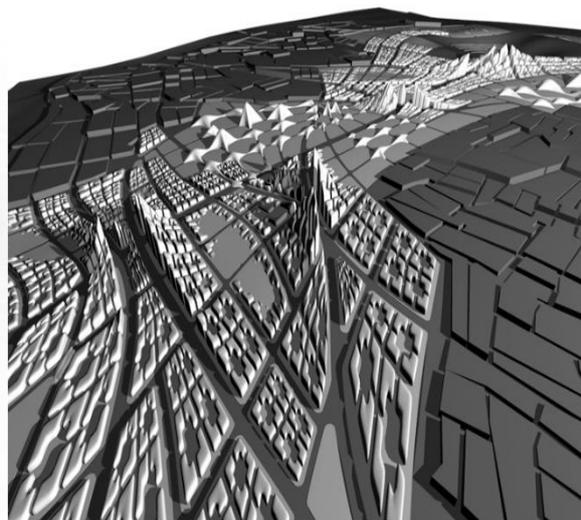
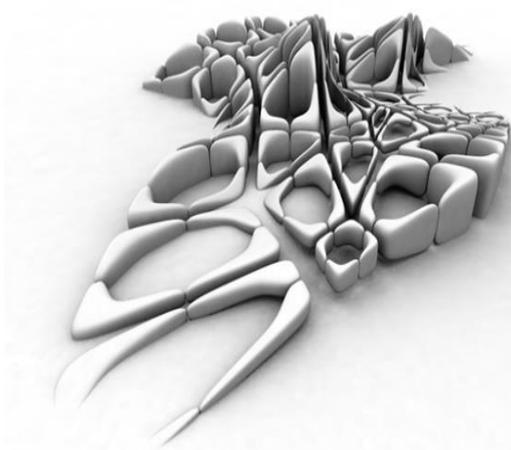


Рис.4. Пошукові рішення району Картал-Пендік, Стамбул, Туреччина, 2006 р., Zaha Hadid architects

Проект має на меті оформлення другого центру на азійській стороні Стамбула задля розвантаження історичного центру. Динамічна мережа моделює мінімізовану мережу обходу. Система доріг була створена за допомогою цифрової моделі woolthread (вовняний волосся). Було використано суміжний контекст як важливу основу для створення міської геометрії. Динамічні інструменти застосовуються параметрично, створюючи мережу з другорядних доріг, які вливаються в магістральні з прилеглими великими ділянками. Параметрична структура району подібна тканині. Міська тканина включає вежі і квартали по периметру. Кwartали розділені на чотири сектори, що враховують вторинну пішохідну систему доріжок.

У майстерні Zaha Hadid architects останнім часом створена ціла низка містобудівних проектів, які сповідають параметричний урбанізм. Крім описаних слід згадати район Soho City в Пекіні, що охоплює 2.5 мільйона квадратних метрів житлових і торгових площ, генеральний план змішаного використання для Більбао, який включає річковий острів та прибережні території [1].

Висновки. Параметризм може існувати тільки шляхом застосування складних параметричних методів. Наразі стають повсякденною дійсністю комп'ютерні технології із застосуванням надсучасного програмного забезпечення (Grasshopper, Mel-script, Rhino-script тощо) для параметричного моделювання. Сьогодні неможливо конкурувати в середовищі сучасного авангардизму без освоєння цих ме-

тодів. Це парадигма організованої (керованої законом) складності, яка пристосовує роботи параметристів до природних умов, де всі форми - результат впорядковано взаємодіючих сил. Подібно до природних систем параметричні містобудівні простори, об'єкти та споруди так тісно об'єднані між собою, а також з людиною-користувачем, що на відміну від принципу поділу функціональних підсистем їх не можна легко розчленувати на незалежні підсистеми.

Список літератури

1. Schumacher Patrik. Parametricism - A New Global Style for Architecture and Urban Design // AD Architectural Design - Digital Cities. Vol 79, № 4, 2009.
2. Шумахер П. Тектоника – дифференциация и сотрудничество архитектуры и строительства [Сетевой ресурс]. - URL: <http://www.patrikschumacher.com/>
3. Дженкс Ч., Новая парадигма в архитектуре, Проект International 2003, 5, 98-112.
4. Хайман, Э. Как параметрическая методология меняет работу архитектора [Электронный ресурс] / Э. Хайман // LAM Блоги и редакции. – Режим доступа: <http://www.lookatme.ru/mag/people/experience/194585-parametric-architecture>
5. Grasshopper 3D [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://archi.place.ru/program/grasshopper/>

STRUCTURING AND CLASSIFICATION OF OBJECTS AND FIGURES OF RECREATIONAL TERRITORIES. NATIVE AND FOREIGN EXPERIENCE**Краснослободцева О.В.**

аспірантка

Київський національний університет будівництва і архітектури

СТРУКТУРИЗАЦІЯ І КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ТА ЯВИЩ РЕКРЕАЦІЙНИХ ТЕРИТОРІЙ. АНАЛІЗ ВІТЧИЗНЯНОГО ТА ЗАРУБІЖНОГО ДОСВІДУ

Summary. The classification and structuring of recreational territories, their objects and figures are analyzed. The role of urban planning classification in creating a model of information support of design and development of these territories is considered.

Анотація. Аналізується класифікація і структурування рекреаційних територій, їх об'єктів і явищ. Розглядається роль містобудівної класифікації у створенні моделі інформаційного забезпечення процесів проектування і розвитку даних територій.

Key words: recreation territory, recreation complex, urban planning classification, information support, information support of territories.

Ключові слова: рекреаційна територія, рекреаційний комплекс, містобудівна класифікація, інформаційне забезпечення, інформаційне забезпечення територій.

Основним етапом процесу інформаційного забезпечення будь-яких територій, включаючи і рекреаційні, є їх аналіз і структурування. Це необхідно для того, щоб встановити взаємозв'язки між явищами, об'єктами, елементами рекреаційних систем, створити понятійний апарат, який дозволить відобразити об'єкт і його складові у реальному стані, а також проводити логічні та обчислювальні операції. На основі класифікації формується теоретична та практична база, яка тримає весь скелет визначень, показників рекреаційної системи.

На даний час в науковій і нормативній базі України відсутні належні класифікації, які могли б стати фундаментом для моделі рекреаційної території, рекреаційних комплексів, які можна було б використовувати для точного аналізу в процесах проектування, дослідження, розвитку даних територій.

Згідно визначення Дьоміна М.М. та Сингаївської О.І., містобудівна класифікація – систематизація інформації про явища та об'єкти, які у сукупності складають предметну область містобудівної діяльності. Вона виходить із сучасних міжнародних і національних (державних) стандартів, які регламентують діяльність з упорядкування підходів, методів групування, кодування первинних облікових одиниць, уніфікації понятійного (термінологічного) апарату. [1]

У вітчизняній і міжнародній термінологічних базах існують поняття «класифікація» і «класифікатор». У міжнародній статистичній практиці вони використовуються в однаковому значенні: класифікація – це «вичерпний і структурований набір описаних категорій, які найчастіше представлені у вигляді ієрархії за допомогою цифрових і літерних кодів».

В українській термінології класифікатор – «документ, в якому, відповідно до ознак класифікації та методів кодування, об'єкти класифікації розподілені на угруповання та об'єкти, яким надано коди». [3]

Крім того, поняття «класифікація» і «класифікатор» відрізняються у залежності від предмету класифікування: об'єкт чи явище. Так, «класифікатор» – систематизований перелік об'єктів (будівель, споруд, підприємств, земельних ділянок, тощо) із наданням для кожного відповідного коду.

А «класифікація» – систематизований перелік явищ (види містобудівної діяльності, види економічної діяльності, тощо) також із відповідним кодом.

У даній статті розглядається саме класифікація – як у відношенні до видів рекреаційної діяльності, так і до рекреаційних об'єктів (територій, споруд, установ), оскільки всі вони у сукупності складають модель рекреаційних систем – загальну мету наукового дослідження автора.

Згідно зарубіжних інформаційних джерел, термін «класифікація» має більш узагальнене значення – «дослідження характеристик певних об'єктів з метою визначення можливості їх угруповання в обмежену кількість класів, на підставі подібності ознак». [7] Основним завданням класифікації є «зниження складності системи». Це процес узагальнення і одночасного спрощення шляхом організації об'єктів та впорядкування кожного в окремі категорії. [8]

Також існує поняття «типологія», яке у деяких працях вважається «родинним» класифікації [5], і у даній роботі теж буде використовуватися в якості термінологічного «синоніму», оскільки охоплює більш широку область дослідження.

Згідно зарубіжного наукового досвіду, типологія, на разі з таксономією є основними підходами до

класифікації. [7] Термін «таксономія» часто використовується замість терміну «класифікація», але робить більший акцент на ієрархічну організацію об'єктів.

Вагомий внесок у класифікацію (типологію) рекреаційних територій в Україні внесла Панченко Т.Ф. [4]

Основним елементом виступає курортно-рекреаційна система, до складу якої входять курорти (курортні поселення, курортні зони і комплекси, санаторно-курортні заклади), рекреаційні зони (тривалого і короточасного відпочинку, туризму і спорту, дачні поселення і садівничі товариства), природно-заповідні об'єкти (біосферні заповідники,

національні природні парки, регіональні ландшафтні парки, парки-пам'ятки садово-паркового мистецтва).

Курорти, в свою чергу, поділяються на приморські, гірські, рівнинні – залежно від природних умов; на бальнеологічні, грязеві та кліматичні – відповідно до лікувальних факторів, на курортполіси, екополіси, акваполіси, урбополіси – за містобудівними ознаками і т.д.

Фоменко Н.В. у своїй науковій праці [6] розглядає поняття «територіальна рекреаційна система» (ТРС) та надає до нього відповідну класифікацію. (табл. 1)

Табл. 1

Класифікація ТРС

За функціями	<ul style="list-style-type: none"> — Лікувальні; — Оздоровчі; — Спортивні; — Пізнавальні;
Залежно від власника земельного фонду	<ul style="list-style-type: none"> — Землі держ. користування; — Лісогосподарські підприємства; — Землі акціонерів/орендаторів; — Землевласників, як юридичних осіб;
За призначенням	<ul style="list-style-type: none"> — території короточасної та тривалої рекреації; — проміжні (с/г);
Відповідно до часової ознаки	<ul style="list-style-type: none"> — Постійні; -Традиційні; -Сезонні; -Тимчасові;

Згідно наукової праці Ioannis A. Pissourios та Alexandros Ph. Lagoroulos, рекреаційні землі входять у якості категорії до складу містобудівної класифікації з позиції використання територій (classification of urban uses). (табл. 2) [9]

Дана класифікація унітарних видів містобудівного використання (classification of the unitary types

of urban uses) здійснена за категоріями, підкатегоріями, групами і підгрупами (стовпці 1, 2, 3 і 4 відповідно) на основі суто містобудівних критеріїв. Стовпці 5 і 6 – нумерація і опис кожного виду використання, 7 – кодові номери унітарних містобудівних об'єктів відповідно до NACE Rev.2. [10]

Фрагмент містобудівної класифікації територій по видам використання

CLASSES OF URBAN USES						
CATEGORIES	SUB-CATEGORIES	Groups	Sub-groups	Numbering	Unitary Types of Land Use	NACE Rev.2 Codes
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
XI. RECREATION						
HOTELS, CAMPINGS AND SIMILAR ACCOMMODATIONS						
				196	Hotels providing accommodations, including motels and hostels	55.1, 55.2
				197	Hotels providing accommodations and recreation	55.1, 55.2
				198	Camping grounds, recreational vehicle parks and trailer parks	55.3
				199	Mountain refuges	55.2
				200	Beaches	93.29
SPECIALISED RECREATIONAL SERVICES						
Recreational food and beverages services						
				201	Cocktail lounges, beer parlours, cafeterias, coffee shops and juice bars: Preparation and serving of beverages for immediate consumption on the premises	56.3
				202	Restaurants, taverns, pizza parlours, snack bars: Provision of food services to seated customers	56.1
				203	Patisseries, pastry shops and donut shops: Provision of confectioneries to seated customers	no code
				204	Canteens, fast-food and take-out restaurants: Provision of food and beverages to non-seated customers	56.1
				Recreational services that also provide food and beverages		
				205	Dance halls, bars, clubs, clubs with live music and discotheques: Night entertainment with the provision of food and beverages to seated customers	56.3
				206	Fun parks for children	no code
				207	Coin-operated games	93.29
				208	Bowling lanes	93.11
				Other specialised recreational services		
				209	Cinemas: Motion picture projection activities	59.14
				210	Gambling and betting shops	92
				211	Casinos	92
				212	Turkish baths, saunas and steam baths	96.04
				213	Amusement parks	93.29

На початку 1960-х років в США почала формуватися формальна система класифікації рекреаційних територій. Підручник з планування земель рекреації та «дикої природи» каталогізував землі за шкалою від «пустелі» до «напів-міської території» (Carhart 1961). Комісія з догляду за рекреаційними ресурсами (Outdoor Recreation Resources Review Commission) запропонувала шість категорій громадських земель: від примітивних (primitive) до високощільних (high-density use) територій (ORRRC 1962). Найбільш широко використовуваною і високорозвинутою системою класифікації є класифікація «Спектр можливостей рекреації» (Recreation Opportunity Spectrum (ROS)). [11]

ROS - інструмент, що використовується для аналізу та управління рекреаційною діяльністю, рекреаційними ресурсами, територіями. Дана класифікація ґрунтується на припущенні, що ряд факторів (наприклад, легкість доступу, щільність використання) сприяють рекреаційному досвіду. (табл. 3)

Вона є концептуальною та організаційною структурою з багатьма потенційними застосуваннями. Як інструмент розподілу та планування, ця класифікація надає різноманітні можливості для відпочинку, що, в свою чергу, сприяє комплексності рекреаційної діяльності.

Для створення моделі інформаційного забезпечення процесів проектування і розвитку рекреаційних територій необхідна класифікація не тільки безпосередньо територій, але і їх об'єктів. Основними первинними елементами цієї моделі є рекреаційні установи.

Курортно-рекреаційні установи класифікуються за певними ознаками (критеріями): функціональна направленість, стаціонарність, сезонність експлуатація, площа, місткість і т.д.

Сукупність рекреаційних установ, згідно термінології, запропонованою Лук'яною, називається «рекреаційним комплексом».[2] Критерії класифікації рекреаційних комплексів групуються на основі містобудівних і соціально-економічних факторів. (табл. 4)

Нижче наведена відповідна класифікація рекреаційних комплексів. [2] (табл. 5)

Як бачимо, без належної класифікації і структуризації територій створення їх ефективної моделі

розвитку неможливо. Це підтверджено як вітчизняним, так і зарубіжним досвідом. Класифікація – найважливіший елемент інформаційного забезпечення процесів проектування і розвитку рекреаційних територій.

Табл. 3

Класифікація рекреаційних територій ROS

Opportunity class Клас території (можливостей)	Experience opportunity Досвід	Physical, social, and managerial setting Фізичні, соціальні та управлінські умови
Primitive (P) Примітивні	Можливість ізоляції (від визначних пам'яток, людського натовпу), щоб відчути себе частиною природного середовища, отримати «викили» від дикої природи, випробувати себе, використати навички виживання на відкритому просторі.	Територія характеризується, по суті, немодифікованим природним середовищем досить великого розміру. Концентрація користувачів достатньо низька. Приймаються заходи для захисту рекреаційних ресурсів. Споруди будуються з місцевих матеріалів, мають легку конструкцію. Відстані між об'єктами збільшені, розсіяні задля мінімізації можливості контакту окремих груп відвідувачів. Моторизоване використання земель всередині території заборонено.
Semi-primitive, non-motorized (SPNM) Напівпримітивні, немоторизовані	Присутні деякі можливості для ізоляції від людського впливу, але не такі обширні, як у «примітивних» територій. Високий рівень взаємодії з природним середовищем.	Територія характеризується переважно незмінним природним середовищем помірної або великої площі. Концентрація користувачів низька, але часто зустрічаються залишені «докази» їх перебування. Територія знаходиться під мінімальним управлінням і контролем. Приймаються заходи для захисту рекреаційних ресурсів і безпеки відвідувачів. Споруди будуються переважно з місцевих матеріалів. Моторизоване використання не допускається.
Semi-primitive, motorized (SPM) Напівпримітивні, моторизовані	Присутня можливість ізоляції від навколишнього шуму, але вона не так важлива, як для «примітивних» та «напівпримітивних немоторизованих» територій. Високий рівень взаємодії з природним середовищем, але водночас дозволяється використовувати моторизовану апаратуру.	Територія характеризується переважно незмінним природним середовищем помірної або великої площі. Концентрація користувачів низька. Район управляється таким чином мінімальний контроль та обмеження на місці присутні, але тонкі. Передусім проводяться заходи щодо збереження рекреаційних ресурсів та забезпечення безпеки відвідувачів. Там, де це можливо, для будівництва використовуються місцеві матеріали. Моторизоване використання дозволено.
Rustic (R) Сільські	Однакові можливості як для відвідування території групами людей, так і для ізоляції від людського впливу. Високий рівень взаємодії з природним середовищем. Можливі як моторизовані, так і немоторизовані види рекреації.	Територія характеризується переважно природним навколишнім середовищем з помірними свідченнями перебування людини. При чому, такі «свідчення» зазвичай гармонізують природне середовище. Концентрація користувачів може бути низькою, або помірною. Територія знаходиться під контролем та управлінням, що забезпечує відчуття безпеки. Передбачено помірну щільність груп відвідувачів на розвинених ділянках, на дорогах і трасах.
Concentrated (C) Концентровані	Існують можливості як для відвідування території групами людей, так і для ізоляції від людського впливу, але, все ж таки, переважає групове користування. Можливості для випробування себе та ризику обмежені спеціальними видами діяльності: спуск і катання на лижах та ін.	Територія характеризується суттєво модифікованим природним середовищем. Використання ресурсів насамперед спрямоване на підвищення рівня рекреаційної діяльності і підтримки рослинного покриву і ґрунту. Концентрація користувачів - від помірної до високої. Значна кількість об'єктів розрахована на використання великою кількістю людей. Є можливості для посиленого моторизованого використання території.
Modern urbanized (MU) Сучасні урбанізовані	Існують можливості відвідування території групами людей. Вони переважають над взаємодією з природним середовищем. Можливості для випробування себе та ризиків, зв'язаних з перебуванням в умовах дикої природи відсутні.	Територія характеризується значною урбанізованістю середовища, хоча може мати елементи природного характеру. Практика використання рекреаційних і природних ресурсів полягає у підвищенні рівня конкретного виду рекреаційної діяльності. Рослинність і вегетативне покриття часто екзотичне та доглянуте. Захист ґрунту зазвичай здійснюється за допомогою терасування. Велика кількість користувачів як на території, так і в прилеглих районах. Значна кількість об'єктів призначена для використання відвідувачами і забезпечення комфортних умов їх перебування: електричні підключення, сучасні санітарні послуги. Інтенсивне моторизоване використання території.

Критерії класифікації рекреаційних комплексів

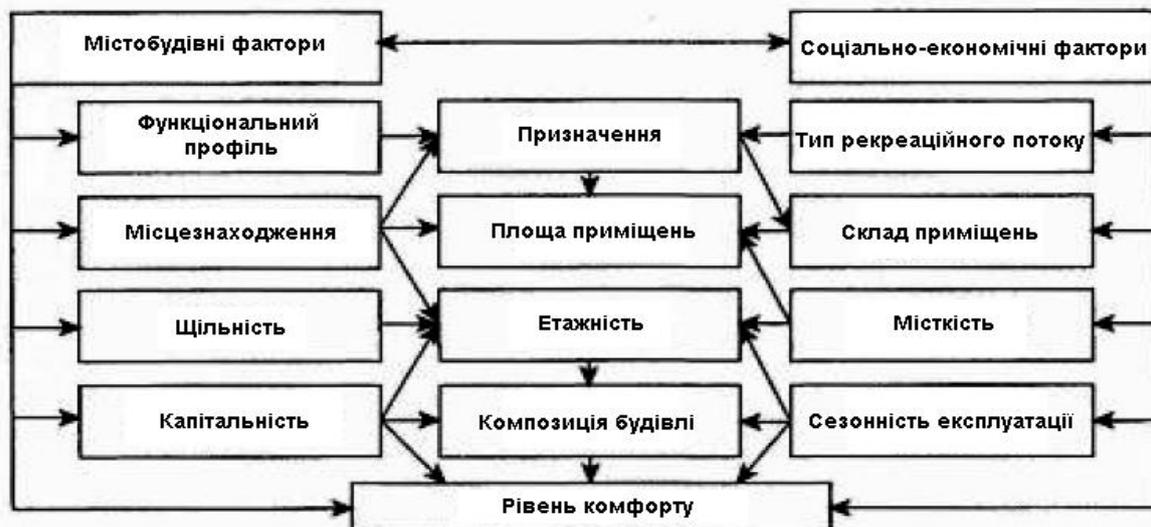


Табл. 5

Класифікація рекреаційних комплексів

Фундаціональний профіль	Вид установи	Місткість установи, к-ть місць	Рівень комфорту	Капітальність	Стаціонарність	Сезонність	Географ. місце знаходження
Санаторні комплекси	Санаторій	300, 500, 1000	Звичайний, вищий, підвищений	Капітальні	Стаціонарні	Цілорічні	При морській, при озерній, прирічній, горній, низько-, середньо-високо-горній, рівнинній
	Санаторний табір			Капітальні сезонні	Тіж самі		
	Санаторій-профілакторій	100, 200, 500		Капітальні цілорічні	--<		
Комплекси відпочинку	Дім відпочинку (пансіонат)	300, 500, 1000	Капітальні, некапітальні	--<	Тіж самі		
	База відпочинку	100, 500, 1000	Некапітальні сезонні	--<	Сезонні		
	Дитячий табір	120, 160, 300, 400	Некапітальні сезонні	Нестаціонарні			
	Молодіжний табір	100, 500, 1000	Некапітальні тимчасові	Тіж самі			
Туристичні комплекси	Курортний готель	300, 600, 1000	Вищий А, Б І, II	Капітальні цілорічні	Стаціонарні	Цілорічні	
	Туристична база	200, 500, 1000	I, II, III	Некапітальні	Тіж самі	Тіж самі	
	Туристичний готель	200, 500, 1000	Вищий А, Б І, II, III	Капітальні	--<	--<	
	Мотель	50, 100, 300	Теж саме	Капітальні цілорічні	--<	--<	
	Кемпінг	100, 600, 1000	III, IV	Некапітальні	Нестаціонарні	Сезонні	
	Ротель			Мобільні	Тіж самі	Тіж самі	
	Флотель, флотокемпінг	100 – 200, 25 – 50		Тіж самі	--<	--<	
	Ботель, ботокемпінг	200 – 500, 50 – 100		Капітальні	Стаціонарні	--<	
Притулок, хатина	25, 50, 100	III, IV	Некапітальні	Тіж самі	Переважно цілорічні		

Література

1. Дьомін М. М., Сингаївська О. І. Містобудівні інформаційні системи. Містобудівний кадастр. Первинні елементи структури об'єктів містобудування та територіального планування./ Київ: Фенікс, 2015. – 213 с.
2. Лукьянова Л. Г., Цыбух В. И. Рекреационные комплексы: Учеб. Пособие / Под общ. ред. В. К. Федорченко. – К.: Вища шк., 2004. – 346 с.
3. Національні (державні) статистичні класифікації (класифікатори) // Державна служба статистики України. – К., 1998-2013. – Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>
4. Панченко Т. Ф. та ін. Типологія об'єктів ландшафтної та туристично-рекреаційної архітектури: посібник до виконання курсових проектів / уклад.: Т.Ф. Панченко, С.М. Проценко, Л.І. Рубан та ін. – К.: КНУБА, 2013. – 40 с.
5. Романов А. А., Учебное пособие. — 2-е изд., перераб. / Идоп.-М.: Советский спорт, 2001. - 288 с.
6. Фоменко Н.В. Рекреаційні ресурси та курортологія / К.: Центр навчальної літератури, 2007. - 312 с.
7. Bailey, K.D. Typologies and Taxonomies: An Introduction to Classification Techniques / SAGE Publications Inc.: London, UK, 1994. – 90 p.
8. Harvey, D. Explanation in Geography / Edward Arnold: London, UK, 1969
9. Ioannis A. Pissourios, Alexandros Ph. Lagopoulos. The Classification of Urban Uses. Article / MDPI. Urban Science, 2017
10. NACE Rev. 2. Statistical classification of economic activities in the European Community / Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2008. – 363 p.
11. Peter R. Pettengill, Robert E. Manning. A Review of the Recreation Opportunity Spectrum and its Potential Application to Transportation in Parks and Public Lands / Paul S. Sarbanes Transit in Parks Technical Assistance Center, 2011. – 48 p.

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Алексеев К.В.¹,
Юдина Д.В.²,
Алексеев В.К.²,
Дворник Е.В.¹,
Клочкова Э.С.¹,
Скепка Х.И.¹,
Узорова А.В.¹,
Евдокимова Н.Г.¹

¹НОУ ВПО «Медицинский университет «РЕАВИЗ», Россия, г. Москва

²ФГБНУ «НИИ фармакологии им. В.В. Закусова» Россия, г. Москва

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ВОПРОИЗВЕДЕННОГО ЛЕКАРСТВЕННОГО ПРЕПАРАТА С ПРОТИВООПУХОЛЕВЫМ ДЕЙСТВИЕМ.

Аннотация. В статье приведена фармацевтическая разработка воспроизведенного лекарственного препарата в таблетированной лекарственной форме на основе микронизированной фармацевтической субстанции флударабина фосфат (Хубэй Биокос Фармасьютикал Ко., Лтд., Китай), входящего в стандарты лечения хронического лимфолейкоза.

Abstract. The article focuses on the application of Quality by Design for generic Fludarabine film-coated tablets, 10 mg development.

Ключевые слова: фармацевтическая разработка, качество через дизайн, флударабина фосфат, воспроизведенный лекарственный препарат, хронический лимфолейкоз (ХЛЛ).

Key words: pharmaceutical development, Quality by Design (QbD), fludarabine phosphate, generic drug, B-cell chronic lymphocytic leukemia (CLL)

Введение.

Фармацевтическая разработка (ФР) является обязательным разделом руководства ICH M4Q(R1) «Качество» Общего технического документа (ОТД) при составлении досье для регистрации лекарственных препаратов (ЛП). Данный раздел дает возможность представить знания, полученные при применении научных подходов в разработке ЛП и его процесса производства. Концепция ФР – это формирование целевого профиля продукта за счет заложение качества через дизайн (Quality by Design). Для этого выделяют критические параметры исходных материалов и процессов и устанавливают их проектное поле с целью поддержания постоянного качества ЛП.

ФФ – антиметаболит, являющийся структурным аналогом пурина и показан для лечения хронического лимфоцитарного лейкоза (ХЛЛ). ХЛЛ представляет собой доброкачественную опухоль, её субстрат составляют зрелые лимфоциты, имеющие В-фенотип [1]. Биодоступность ФФ при пероральном приёме составляет 50-75% [2]. ЛС входит в схемы лечения современных стандартов терапии в онкологии и в перечень жизненно необходимых и важнейших лекарственных препаратов (ЖНВЛП) для медицинского применения [3].

В связи с этим целью работы являлась ФР таблеток ФФ, покрытых пленочной оболочкой, 10 мг с учетом требований, изложенных в руководствах ICH Q8 «Фармацевтическая разработка» и ICH Q9 «Управление рисками для качества» и обозначение критических технологических параметров (СРП), требующих непрерывного мониторинга в ходе производственного процесса.

Материалы и методы:

объект исследования – микронизированная фармацевтическая субстанция (ФС) ФФ (Хубэй Биокос Фармасьютикал Ко., Лтд., Китай) (менее 10 мкм). В качестве вспомогательных веществ (ВВ) на основании результатов патентного поиска были выделены следующие: β-циклодекстрин (Kleptose®, Roquette, Франция), Ludipress® (BASF, Германия), кросповидон (Polyplasdone® XL, ISP, Германия), натрия лаурилсульфат, натрия стеарилфумарат (Pruv®, JRS Pharma, Германия).

Оценка физико-химических и технологических характеристик исходных (ФС и ФФ), промежуточных (таблеточная смесь ФФ) и конечных (таблетки ФФ) объектов исследования проводилась согласно методам, описанным в ГФ XIV издания.

Конечную рецептуру таблеточной смеси выбирали на основе значений обобщенной функции желательности Харрингтона.

Оптимизацию давления прессования проводили методом Хеккеля.

Результаты и обсуждение.

На первом этапе изучали физико-химические и технологические свойства микронизированной ФС ФФ с целью определения критических параметров качества. Методом дифракционной спектроскопии подтверждено соответствующие фактической дисперсности ФС ФФ дисперсности, заявленной производителем: средний размер частиц микронизированной ФС составил $X_{90}=2,05\pm 0,02$ мкм с узким интервалом распределения частиц по размеру (ИРЧ=2,15±0,13). ФФ мало растворим в воде, растворим в диметилформамиде и практически не рас-

творим в этаноле 96%. Неудовлетворительные показатели степени сыпучести свидетельствуют о выраженном электростатическом взаимодействии между частицами, что объясняет плохую смачиваемость порошка. Проведена проверка показателя удельного вращения, значение которого должно находиться в пределах $+10^\circ$ до $+14^\circ$ в пересчете на безводное вещество. Экспериментально установленное значение соответствовало норме и составило $+12^\circ$.

На втором этапе разработки было принято решение включения в состав β -циклодекстрина (ЦД) в качестве разбавителя, образующего клатратные комплексы с ФФ. ЦД нашли широкое применение в разработке ЛП на основе ФС с цитотоксичной активностью, как способ её снижения, а также в качестве таргетных систем доставки и ВВ, способных улучшать биологическую доступность ФС [4,5,6].

Поскольку ФФ имеет небольшую молекулярную массу (365.214 г/моль), были рассмотрены следующие соотношения физических смесей ФФ: β -ЦД – 1:1, 1:2, 1:3, 1:4. Установлено, что растворимость ФФ в воде перестаёт значительно изменяться при соотношении 1:2 (Рис. 1), поэтому в качестве эффективного соотношения выбрано 1:2. Растворимость ФС ФФ увеличилась в физической смеси с β -

ЦД в 1,5 раза, при этом ФС оставалась мало растворимой в воде, поэтому было решено включить в состав натрия лаурилсульфат в качестве поверхностно-активного вещества, что позволило перевести ФС ФФ в категорию «растворима» по шкале растворимости (ОФС. 1.2.1.0005.15 Растворимость). В качестве разбавителя, ускоряющего распадаемость таблетки, использовали комплексный разбавитель Ludipress® на основе лактозы, связывающего агента поливинилпирролидона (Kollidon 30) и кросповидона (Kollidon®CL). Значение среднего времени распадаемости таблетки указанного состава соответствовало требованиям ГФ XIV, однако приближалось к верхнему значению границы (15 минут), что послужило основанием для включения дополнительного количества кросповидона. В качестве вещества, способствующего скольжению решено выбрать натрия стеарил фумарат, т.к. он оказал меньшее влияние на показатель времени распадаемости таблеток по сравнению с магния стеаратом. Конечный состав рецептуры таблетки-ядра выбрали исходя из рассчитанных значений обобщенной желательности ($D=0,978$) (Табл.1).

Таблица 1

Состав таблеток ФФ, покрытых пленочной оболочкой, 10 мг

Вещество	НД, фирма производитель, страна	Количество, г
Таблетка-ядро		
Флударабина фосфат	ФСП Хубэй Биокос Фармасьютикал Ко., Лтд., Китай	0,01
β -ЦД (Kleptose®)	Ph. Eur. Roquette, Франция	0,02
Ludipress®	USP, Eur. Ph. BASF, Германия	0,114
Кросповидон (Polypladone® XL)	USP/NF, Ph. Eur., JPE ISP, Германия	0,0045
Натрия стеарил фумарат (Pruv®)	Ph. Eur., NF, JPE JRS Pharma, Германия	0,0015
Пленочная оболочка		
Opadray® розовый 04A230001	«Colorcon», Великобритания	0,004
Теоретическая масса таблетки		0,154

Технологией прямого прессования получали продолговатые таблетки-ядра указанного состава.

В качестве покрытия выбрали Opadray розовый (Colorcon, Великобритания). Прирост массы таблетки составил $3.0 \pm 0.3\%$.

Исходя из планирования целевого профиля продукта обозначались ККТ технологического процесса таблетирования:

- скорость и время перемешивания ФФ с β -ЦД и натрия лаурилсульфатом, для достижения полноты включения ФС в β -ЦД;
- время перемешивания таблеточной смеси для достижения однородности дозирования;
- контроль скорости и давления прессования;
- контроль процесса нанесения покрытия.

В указанных ККТ опытным путем обозначались проектное поле критических технологических параметров, в установленных границах которого таблетки соответствовали нормам качества.

По результатам испытаний на стабильность таблеток ФФ, покрытых пленочной оболочкой, 10 мг были даны рекомендации по выбору первичной упаковки, в результате чего выбраны алюминиевые блистеры.

Полученные таблетки представляли собой продолговатые двояковыпуклые таблетки с пленочной оболочкой розового цвета, на поперечном срезе – ядро белого цвета. Результаты теста «Растворение» полученных таблеток удовлетворяли требования ГФ XIV издания для таблеток, покрытых пле-

ночной оболочкой (не менее 75% (Q) ФФ за 45 минут). Результаты теста сравнительной кинетики растворения (ТСКР) подтвердили фармацевтическую эквивалентность референтному ЛП ФЛУДАРА® (таблетки, покрытые пленочной оболочкой, 10 мг, Bayer Schering Pharma AG, Германия) (не менее 80% (Q) за 20 минут). Фармацевтическая эквивалентность подтверждается значениями рассчитанных факторов сходимости f_2 и различия f_1 , укладывающимися в допустимые интервалы. Образцы разработанных таблеток ФФ исследовались на количественное содержание ФФ ($10 \text{ мг} \pm 5 \%$), и однородность дозирования ($AV \leq L_1$ (15,0)) методом ВЭЖХ. Полученные результаты удовлетворяли требования ГФ XIV издания.

Выводы.

Проведена фармацевтическая разработка таблеток ФФ, покрытых пленочной оболочкой, 10 мг в соответствии с требованиями, изложенными в руководствах ICH Q8 «Фармацевтическая разработка» и ICH Q9 «Управление рисками для качества» и обозначены критические технологические параметры производства.

Литература.

1. А. А., Абовян. Случай наблюдения хронического лимфолейкоза с поражением костей черепа / А. А. Абовян., А. С. Казьмин // Молодой ученый. 2016. №29.2. С. 1-3. URL <https://moluch.ru/archive/133/3>
2. Foran J.M., Oscier D, Orchard J. et al. Pharmacokinetic study of single doses of oral fludarabine phosphate in patients with 'low- grade' non-Hodgkin's lymphoma and B-cell chronic lymphocytic leukemia. Journal of Clinical Oncology 1999;17(5):1574-1579.
3. С.С., Бессмельцев. Место и роль флударабина в терапии больных неходжкинскими лимфомами / Бессмельцев С.С., Абдулкадыров К.М.// Русский медицинский журнал. 2002. № 24. С. 1119.
4. Gidwani B, Vyas A. A. Comprehensive Review on Cyclodextrin-Based Carriers for Delivery of Chemotherapeutic Cytotoxic Anticancer Drugs. Biomed Res Int., 2015:198-268.
5. Природные циклические олигосахариды циклодекстрины, в системах доставки лекарств / П. Ю. Федорова, Р. К. Андресон, Е. К. Алехин, Н. Г. Усанов // Медицинский вестник Башкортостана. 2011. №4. С. 125-130.
6. Способы улучшения растворимости труднорастворимых фармацевтических субстанций/ Е. В. Блынская., Д. В. Юдина, К.В. Алексеев, А.И. Ма-рахова // Фармация. 2017. №6, Т. 66. С.15-19.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Гуля А.С.
Остроухов Н.Н.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ КОСМОПЛАН КАК ОСНОВА БЕЗРЕАКТИВНОЙ КОСМОНАВТИКИ

Введение.

В январе 2019 года, в газете «Военно-промышленный курьер» была опубликована статья «К луне и обратно на антигравитации» где в частности сказано, что КБ им. Лавочкина просит «Роскосмос» предоставить средства на разработку антигравитационного экрана, который создает зону, где ускорение свободного падения уменьшается во много раз. Если в ней разместить разгонный блок с обтекателем и полезной нагрузкой, общающаяся система сможет самостоятельно, без использования носителя выводить полезную нагрузку на стандартную орбиту. Предположим, что экран уменьшает ускорение свободного падения в 24,2 раза.

Тогда это ускорение будет равно центробежному ускорению, которое возникает за счет вращения Земли. В результате в процессе выведения и экран, и все, что находится в зоне его действия, будет обезвешено. Получается, что ракеты-носители нам больше не нужны, поскольку их задачи могут самостоятельно выполнять уже существующие разгонные блоки, если их снабдить такими экранами. Стоимость пуска уменьшается в десятки раз, а негативное воздействие на окружающую среду по сравнению с тяжелыми носителями - в сотни. КБ имени Лавочкина рассматривает идею комбинирования антигравитационного экрана с разгонными блоками, но в данной работе будет рассматриваться создание подъемной силы без какой-либо ракетодинамической составляющей.[7.] Пригцптально новый способ, который справедливо можно назвать электродинамическим, основанным на действии на ЛА силы Ампера.

Таким образом и появилось название работы. По существу идеи в статье никакой информации нет, а все излагаемое - результат идей авторов.

Цель настоящей работы-проверка принципиальной возможности создания нереактивного(бессилового,неракетного) устройства, способного частично или полностью компенсировать собственный вес летательного аппарата . Необходимость решения сформулированной задачи негативное нарастающее воздействие на окружающую среду ракетными двигателями, как уже говорилось выше. Кроме того, решение задачи открывает возможность создания летательного аппарата, способного зависать в произвольной точке пространства(и в атмосфере и вне неё), то есть создание космоплана.

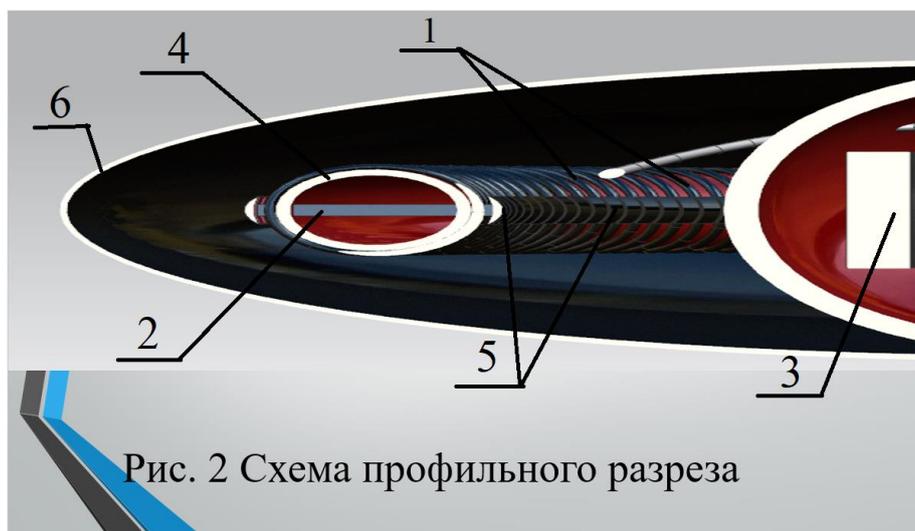
При сравнительной очевидности принципиальной схемы устройства, разработка далее сугубо предварительного эксплуатационного проекта связана с решением целого ряда как технических проблем, так и уяснения некоторых теоретических вопросов, в частности связанных с поведением сверхпроводников в сильных магнитных полях и элементов катушки, воспринимающих реакции.

Отдельный самостоятельный интерес представляет вопрос энергообеспечения предлагаемого летательного аппарата , а именно большие абсолютные значения потребляемых токов и сроков непрерывной работы. Наиболее предпочтительным является применение ядерной силовой установки, но в таком варианте возникают проблемы устройств радиационной защиты. С разной степенью подробности рассмотрены вопросы:

1. Экспериментальный проект космоплана с электродинамической компенсацией собственного веса. Возможный вид летательного аппарата представлен на рис. 1



На рис. 1 представлена принципиальная схема устройства. Оно состоит из плоской кольцевой индукционной катушки-1 и системой радиальных проводников пересекающих плоскость симметрии катушки-2, встроенное в каркас-4



И катушка и радиальные проводники замыкаются постоянным током через кольцевые электроды-5, поступающим из энергетической силовой установки-3 с радиационной защитой и кабиной экипажа. Сама машина заключена в оболочку-6 (рис. 2).

Из схемы понятен принцип функционирования устройства.

Для генерации магнитного поля используется плоская кольцевая индукционная катушка-1 с диаметром средней осевой линии d и шириной(радиальный размер)- h . Каркас катушки-4 выполнен из неметалла с формой сильно сплюсненного тора второго порядка(соотношение поперечных размеров сечения $\sim 10:1$) На каркасе катушки размещена её обмотка -1 с числом витков N , равномерно распределенным по контуру так, чтобы каждый виток был ориентирован в радиальном направлении. Материалом катушки является хороший проводник- на стадии моделирования и отработки принципиальной

схемы допустима медь, в перспективе для создания крупного летательного аппарата является необходимым использование сверхпроводников(увеличение допустимой максимальной плотности тока) или ферромагнетика(увеличение индуктивности), допускаются оба варианта, так как за счёт высокой индуктивности можно использовать меньший ток, и наоборот.

По внутреннему и внешнему периметру катушки смонтированы кольцевые электроды-4, между которыми установлены радиальные проводники-2(пример расположения радиальных проводников показан на рис.3) . Число последних N_1 . Электропитание обмотки катушки и радиальных проводников независимое .

2.Электродинамика генерации подъёмной силы

Прохождение постоянного тока I по обмотке катушки приводит к возникновению во всём внут-

реннем объёме катушки приблизительно однородного магнитного поля с индукцией \underline{B} , ориентированной по окружности. $B = \frac{\mu_0 NI}{\pi d_{ср}}$ (Тл) (1), где $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная, N- число витков обмотки катушки, I-сила тока в обмотке, d-радиус кольцевой поверхности, равноудалённой от внутреннего и внешнего периметров катушки. [5.]

На радиальный проводник длиной h с током I_1 со стороны магнитного поля действует сила

$$F = B * I_1 * h \quad (2)$$

А суммарная сила, действующая на N_1 проводника

$$F_{\Sigma} = \frac{\mu_0 * N^2 * I^2 * h}{\pi * d_{ср}}$$

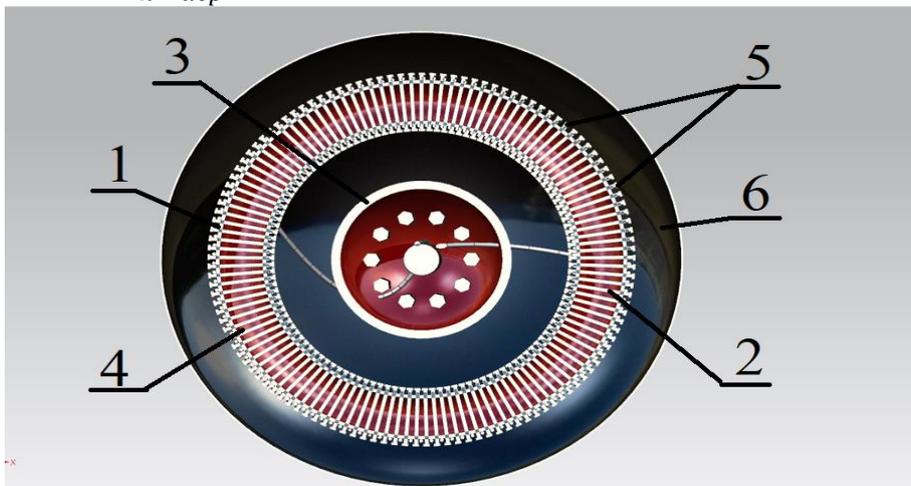


Рис. 3 Схема вид сверху в разрезе

При увеличении силы тока до 4 кА подъёмная сила оценивается величиной 200т. А вес медной проводки до 100т., так что возникает возможность подъёма полезной нагрузки без использования других двигателей.

3.Использование сверхпроводников.

Возможность или невозможность использования сверхпроводников с одной стороны привлека-

ет в частности при $N=N_1=1000$, $I=1000\text{А}$, $d=8\text{м}$, $h=3\text{м}$

$$B = \frac{4\pi * 10^{-7} * 10^6}{8\pi} = 0.05 \text{ Тл.}$$

Получаем $F_{\Sigma} = 15 \text{ т.}$

В этом случае суммарная длина проводника составляет ~ 9000м при необходимом сечении для допустимой плотности тока $\rho=3 \text{ А/мм}^2$ (медь) $S=330 \text{ мм}^2$ (в случае круглого сечения $d=18\text{мм}$). Таким образом вес медной проводки составляет ~ 25 т. В этом случае можно говорить лишь о частичной компенсации веса летательного аппарата.

тельно, но с другой сильное магнитное поле разрушает само явление сверхпроводимости, так как принцип действия сверхпроводников согласно [1,2,3,4] основывается на перемещении с малым сопротивлением куперовских пар электронов, которые и разрушаются под действием сильного магнитного поля.

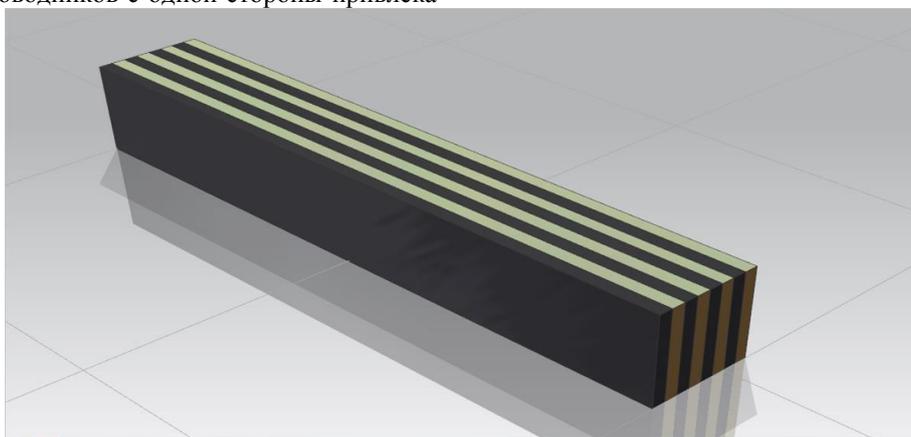


Рис. 4 Провод радиального проводника

Магнитное поле не проникает в сверхпроводник (экранировка скин-слоем \propto толщине). Для ослабления (предупреждения эффекта экранировки магнитного поля радиальные проводники-2 предлагается выполнять из чередующихся слоёв по типу «сверхпроводник-проводник», как показано на рис. 4(где чёрные пластины- сверхпроводник) с использованием в качестве обычного проводника медь(жёлтые пластины) или алюминий.

На уровне постановки задачи – можно ли создать «полу» сверхпроводник, например многослойной комбинацией сверхпроводника и меди.

4. Реакция и выполнимость третьего закона Ньютона.

Отдельной задачей является нахождение механического равновесия предполагаемой электромеханической системы, конкретно об объекте, воспринимающем силу реакции от силы Ампера и выполнимости третьего закона Ньютона. Так как целью данной работы не ставилось опровержение классических законов механики и ньютоновской физики в целом, была выдвинута гипотеза о существовании данной реакции.

Данная гипотезой является реакция в самом токе, который по природе своей- это упорядоченный поток заряженных частиц. Вспомним, что сила Ампера, [5.] действующая на проводник-это векторная сумма сил Лоренца, действующая на единичный заряд. Реакция же от подъемной силы воспринимается носителями заряда в обмотке катушки-1. На принципиальном уровне это согласуется с аналогичной взаимной ориентацией тока, создающего магнитное поле, и возникающей подъемной силы.

Есть еще одна фантастическая гипотеза, для существования которой придётся предположить существование эфира, что никак не совпадает с представлениями о современной физике у признанной мировым научным сообществом теории относительности. Более подробно о нахождении реакции можно будет говорить после завершения создания опытного образца и первых испытаний перспективного электродинамического космолана.

Вывод.

Качественная оценка эксплуатационных параметров выполнена для устройства с катушкой

шириной в три метра с тысячью витков плоской катушки индуктивности и тысячью радиальных проводников выполненных из меди при токах в обмотке и радиальных проводниках в один килоампер, а также индукции в ноль целых и пять сотых тесла подъемная сила составляет пятнадцать тонн, при токе в четыре килоампера и индуктивности в ноль целых и две десятых тесла соответственно двести сорок тонн. При выполнении всех проводников из меди собственный вес электрического оборудования составляет соответственно сорок и сто тонн. При выполнении проводящих элементов из сверхпроводников вес проводниковой системы снижается не менее чем в десять раз.

В заключение хотелось бы сказать, что подъемная сила, создаваемая космоланом зависит только от силы тока, количества витков и радиальных проводников и практически не зависит от внешней среды, будь то космический вакуум, подводное пространство или атмосфера, что может значительно расширить область применения космолана. Как видно из выполненной количественной оценки параметров и характеристик, космолан может нести на себе невероятную по мерам космонавтики полезную нагрузку, оставаясь при этом фактически невесомым, что в разы удешевляет производство запуска.

Литература:

- [1.]Геккер И.С. Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой — М. изд. Атомиздат 1978 312 с
- [2.]Дж. Уильямс Сверхпроводимость — М. и ее применение в технике. изд Мир 1973 , 296 с.
- [3.]Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. — В 10-ти т. Т. II. Теория поля. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988
- [4.]Линтон Э. Сверхпроводимость . изд. Мир 1971, 282 с.
- [5.]Сивухин Д. В. Общий курс физики. — М.: Наука, 1977. — Т. III. Электричество.
- [6.]Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. 16-е изд. — М.: КноРус, 2011.
- [7.]Газета Военно-промышленный курьер 2019 г. №3

Кокотов Юрий Абрамович.

Доктор химических наук

Санкт-Петербург.

СООТВЕТСТВИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВ. МЕЖАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ СООТВЕТСТВИЯ.

Kokotov Yuri Abramovich.

Doctor of Chemical Sciences.

St. Petersburg.

CORRESPONDENCE OF REAL AND COMPLEX SPACES. INTER ALGEBRAIC CORRESPONDENCE OPERATIONS.

Abstract. Algebra of complex numbers can be treated as specific algebra of complex binomials with algorithm of multiplication forming new complex binomial. Real and complex binomials ("numbers") may be represented in various ways through relative quantities in numerical or functional form and then merged into monomials. The interalgebraic operations of correspondence, concern to set theory, is determined the correspondences between real and complex binomials as well between real and imaginary monomials. The points of the real and complex planes, defined by the two real numbers forming real and complex binomials, are in direct correspondence determining by inter algebraic operation of "direct correspondence". The "cross correspondence" is other interalgebraic operation carried out through «raising to the imaginary degree". That operation establish correspondences between real hyperbolic and complex trigonometric binomials, as well as between real trigonometric and complex hyperbolic binomial, and realised either through binomials themselves, or through monomials (exponential or trigonometric). Was considered correspondences between exponentials (real and imaginary) and power functions (real and imaginary) as well as between real and imaginary power functions. Given examples of concrete correspondences between the real and complex numerical binomials. The widely discussed Euler formula combined four fundamental numbers of mathematics was analyzed. It was demonstrated what through correspondences of real and imaginary elementary "quartic functions"

(the elements of "quartic" sets) may be established correspondences of different real and complex functions. Interdependences between binomials concerned to the same set, established through operations with binomials concerned to another set, should be considered as complex operations of inter-algebraic correspondence.

1. Введение. Предварительные сведения.

Изучение комплексных чисел обычно начинают с аксиоматического изложения их алгебры-определения чисел и правил действий с ними. При этом обычно не отмечаются следующие существенные обстоятельства (см., однако, [1]):

1. Комплексное число $A+Bi$ следует рассматривать, как **комплексный алгебраический бином (двучлен, пару чисел)**, образуемый числами с разными особенностями или их символами (буквами).

2. Произведение и частное таких биномов (многочлен или рациональная дробь) всегда делится на две части, образующие **новый комплексный бином**.

3. Составляющие комплексного бинома **интерпретируются** геометрически как прямоугольные координаты точки комплексной плоскости с координатами $(x;iy)$. Таким образом, алгебра комплексных чисел оказывается **специфической алгеброй биномов**.

Сказанное справедливо и для комплексных чисел иного вида (двойных и дуальных) [2] с иными особыми числами (операторами умножения).

4. Биномы, образуемые вещественными и комплексными числами, могут интерпретироваться как прямоугольные координаты $(x,y), (x,iy)$ точек вещественной и комплексной плоскостей.

5. Вещественное и комплексное **биномиальные пространства** соответствуют. Соответствие

осуществляется **меж алгебраическими операциями соответствия**, относящимися к теории множеств.

Биномы и в вещественном, и в комплексном пространствах могут быть **разными способами** представлены в **приведенной форме**, через взаимосвязанные **относительные** величины и **положительный** (абсолютное число) модуль. Относительным величинам может быть придан смысл двух взаимосвязанных функций от общего аргумента x , образующих **функциональный бином**. Приведенные функции определяются как геометрически, так и аналитически (разложениями в ряд по аргументу x) [3].

Далее рассматриваются только два варианта приведенных форм вещественных и комплексных функциональных биномов:

Тригонометрический вариант:

Исходный бином представляется в виде произведения положительного модуля

$$r = \left| \sqrt{A^2 + B^2} \right| \quad (1)$$

на тригонометрический бином, образованный двумя сопряженными тригонометрическими функциями- косинусом и синусом:

$$\begin{aligned} A + B &= r [\cos(x) + \sin(x)] \\ A + iB &= r [\cos(x) + i \sin(x)] \end{aligned} \quad (2)$$

Гиперболический вариант:

Здесь исходный бином рассматривается как разность $A-B$, представленная через произведение гиперболического модуля на гиперболический бином, образованный гиперболическими косинусом и синусом:

$$\begin{aligned} A - B &= \mu (\cosh(x) + \sinh(x)); \\ A - Bi &= \mu (\cosh(x) - i \sinh(x)); \end{aligned} \quad (3)$$

Гиперболический модуль μ , определяется как

$$\mu = +\sqrt{|A^2 - B^2|} \equiv +\sqrt{|A^2 + (Bi)^2|} \quad (4)$$

Соотношение между модулями определяется формулой:

$$\mu = r \sqrt{1 - 2 \sin^2(x)} \quad (5)$$

Тригонометрический вариант приведения биномов широко используется в теории комплексной переменной.

Вещественные и комплексные **приведенные биномы** с модулем, равным единице, назовем **элементарными**.

Модуль бинома может быть увеличен или уменьшен в любое число раз, что соответствует умножению исходного бинома на **положительное число**. Это фактически определяет взаимную независимость модуля и элементарного бинома.

Элементарные биномы могут быть «свернуты» в **одночлен** с прежним аргументом, т.е. представлены в виде одной функции. Назовем эту операцию **редуцированием**.

2. Результаты.

1. Прямое соответствие алгебраических биномов различных пространств. Операция прямого алгебраического соответствия.

Из элементарных геометрических соображений мы можем записать следующие «тригонометрические» уравнения соответствия

$$1) \frac{(i \sin x)_C}{i} \square (\sin x)_R; \quad 2) (\cos x)_C \square (\cos x)_R \quad (8)$$

первое из которых фактически эквивалентно соотношению (7). Вещественным **элементарным тригонометрическим биномам** (с аргументом x) соответствуют (находятся в прямом соответствии) комплексные тригонометрические биномы:

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x + (i - 1) \sin x &\square \cos x + i \sin x \\ \cos x - \sin x - (i - 1) \sin x &\square \cos x - i \sin x \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогична операция для вещественных гиперболических биномов:

Точки двух двумерных пространств (вещественного и комплексного) определяемые одной и той же парой вещественных чисел, следует считать соответственными друг другу.

Действия, определяющие переход от точки одного пространства к соответственной точке другого, назовем **операциями соответствия**.

Их следует рассматривать как самостоятельные **вне алгебраические** или **между алгебраические** операции **изменения алгебры**. Они относятся к теории множеств и сам термин «соответствие» принадлежит этой теории.

Далее обозначаем их специальными символами \square и \succ , употребляемым вместо знака равенства. Мы сознательно не используем далее других терминов и обозначений теории множеств, поскольку в ней обычно рассматриваются **внутри алгебраические** операции, **не меняющие алгебры**.

Очевидно, что вещественному алгебраическому биному $A+B$ (или $X+Y$) всегда соответствует комплексный бином

$$A + Bi \text{ (или } X + Yi)$$

Перейти от одного вида биномов к другому, можно прибавив или отняв **переходный комплексный бином** $B(i-1)$ или $Y(i-1)$:

$$\begin{aligned} A + B &\square A + iB \\ A - B &\square A + iB \end{aligned} \quad (6)$$

Этой операции эквивалентна следующая:

$$\frac{Bi}{i} \square B \quad (7) \text{ Назовем их операциями } \textbf{пря-$$

мого соответствия вещественных и комплексных биномов («комплексных чисел») разных пространств

2. Прямое соответствие функциональных биномов вещественного и комплексного пространств. Тригонометрические и гиперболические, биномы.

$$\begin{aligned} \cosh(x) + \sinh(x) + (i-1)\sinh(x) &\square \cosh(x) + i\sinh(x) \\ \cosh(x) - \sinh(x) - (i-1)\sinh(x) &\square \cosh(x) - i\sinh(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Левые части этих уравнений – вещественные элементарные функциональные биномы (тригонометрические и гиперболические). Правые части – аналогичные комплексные биномы. Модули соответственных биномов при прямой операции не меняются.

Вещественные тригонометрические биномы редуцируются **тригонометрическими одночленами**:

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) &= \text{cps}(x) \\ \cos(x) - \sin(x) &= \text{cms}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Вещественные **одночлены** $\text{cps}(x)$ и $\text{cms}(x)$ полезно рассматривать как самостоятельные функции, рассчитываемые по значениям составляющих, или по формулам

$$\begin{aligned} \text{cps}(x) &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ \text{cms}(x) &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Комплексные элементарные тригонометрические биномы сводятся (по Эйлеру) в одночлен (редуцируются) мнимой экспонентой:

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= e^{ix} \\ \cos x - i \sin x &= e^{-ix} \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (9) в редуцированной форме принимает вид:

$$\begin{aligned} \text{cps } x + (i-1)\sin x &\square e^{ix} \\ \text{cms } x - (i-1)\sin x &\square e^{-ix} \end{aligned} \quad (14)$$

Эта формула сопоставляет одночлены двух пространств и образована только периодическими функциями.

Биномы в редуцированной форме становятся двух символьными одночленами - произведениями модуля на функциональный одночлен.

3. Операция сопряжения.

В алгебре комплексных чисел особое место уделяется сопряженным комплексным биномам («числам»). Умножение комплексного числа (бинома) на сопряженное с ним комплексное число, результатом которого оказывается квадрат модуля **т.е. вещественное число**, можно считать **операцией сопряжения**. Она используется в математике и физике для перехода от полученного в результате тех или иных операций комплексного числа к вещественному, «имеющему смысл».

В квантовой физике вещественному квадрату модуля дается вероятностная трактовка. Он рассматривается как «плотность вероятности» функции распределения, характеризующей локализацию частицы-волны в вещественном пространстве.

Модуль (длина радиуса вектора точки)-лишь одна из двух полярных координат соответственных друг-другу точек вещественной и комплексной

плоскостей. Вторая координата (угол) при этой операции остается неопределенной.

реимущество операции прямого соответствия точек обоих пространств по сравнению с операцией сопряжения очевидно.

4. Возведение бинома и одночлена в мнимую степень (перекрестное соответствие).

Формальное возведение в мнимую степень i вещественной экспоненты, (редуцирующей вещественный гиперболический бином) вводит в алгебру комплексных чисел мнимые экспоненты

$$(e^x)^i = e^{ix}; (e^{-x})^i = e^{-ix}$$

Обычно эти соотношения записываются именно как равенства, что существенно затемняет их смысл. Здесь и далее мы их записываем их через специальный символ \asymp , означающий перекрестное соответствие:

$$(e^x)^i \asymp e^{ix}; (e^{-x})^i \asymp e^{-ix} \quad (15)$$

Можно понять, что возведение в мнимую степень i -это также «**меж алгебраическая операция**». Действительно, в алгебре вещественных чисел нет числа i , и эта операция не имеет алгебраического смысла. Это переход от вещественного пространства к комплексному, т.е. операция соответствия, однако, теперь осуществленная **через одночлен**.

Обратный переход от комплексного пространства к вещественному следует описывать как извлечение корня мнимой степени из комплексных одночлена и бинома.

Мнимая экспонента вводится в математику интуитивно и формально- как возведение вещественной функции в мнимую степень. Неоднократно отмечалось, что, несмотря на многие аналогии свойств вещественных и мнимых экспонент, формула Эйлера (возведение вещественной экспоненты в мнимую степень) **вводится** (т.е. постулируется), а не доказывается [4],а, следовательно, и

$$\begin{aligned} \{ [\cos(x) + \sin(x)]^i \} &\asymp \{ [\cos(ix)] + [\sin(ix)] = \cosh(x) + i \sinh(x) \} \\ \{ [\cos(x) - \sin(x)]^i \} &\asymp \{ [\cos(ix)] - [\sin(ix)] = \cosh(x) - i \sinh(x) \} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [\csc(x)]^i &\asymp \csc(ix) \\ [\sec(x)]^i &\asymp \sec(ix) \end{aligned} \quad (18)$$

Эти формулы устанавливают перекрестные соответствия вещественного и комплексного функциональных биномов, а также вещественного и комплексного одночленов. Правая часть уравнения (18) может быть представлена в виде бинома («развернута»):

$$\begin{aligned} [\csc(x)]^i &\asymp \{ \cosh(x) + i \sinh(x) \} \\ [\sec(x)]^i &\asymp \{ \cosh(x) - i \sinh(x) \} \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что уравнение (18) (возведение вещественного тригонометрического одночлена в мнимую степень) –некий аналог формулы Эйлера для экспонент. Мнимый гиперболический бином редуцируется

Оно определяет **функциональное соответствие** вещественных тригонометрических и комплексных гиперболических биномов.

Таким образом в теории функций комплексной переменной возникают **комплексные гиперболические** элементарные биномы.

Операция возведения вещественных функциональных биномов или их одночленов в мнимую степень устанавливает перекрестное **соответствие функциональных биномов**:

$$\begin{aligned} [r \times \csc(x)]^i &\asymp \mu \{ \cosh(x) + i \sinh(x) \} \\ [r \times \sec(x)]^i &\asymp \mu \{ \cosh(x) - i \sinh(x) \} \end{aligned} \quad (20)$$

Это изменение также можно записать в виде операции перекрестного соответствия- возведения тригонометрического модуля в мнимую степень: f

смысл этой операции не ясен. Однако, ее трактовка как **вне алгебраической** операции соответствия точек вещественной и комплексной плоскостей оказывается естественной.

Уравнения (15) могут быть записаны через вещественные и мнимые элементарные **гиперболические биномы**, редуцируемые экспонентами:

$$\begin{aligned} [\cosh(x) + \sinh(x)]^i &\asymp \cos(x) + i \sin(x) \\ [\cosh(x) - \sinh(x)]^i &\asymp \cos(x) - i \sin(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Эта формула определяет **перекрестное соответствие** вещественных гиперболических и комплексных тригонометрических биномов.

Пока только аналогии (доказательство приведем далее) можно возвести в мнимую степень вещественные тригонометрические биномы, а также и вещественный тригонометрический одночлен:

$$+\sqrt{(A^2 + B^2)^i} \asymp +\sqrt{(A^2 + (iB)^2)} = +\sqrt{A^2 - B^2}; \quad (22)$$

Очевидно, что эта операция теряет смысл при $A=B$.

Геометрически это означает, что все соответственные точки вещественной и комплексной областей, за исключением точек на диагоналях углов координат (асимптот гипербол), могут рассматриваться одновременно и как точка некой окружности $X^2 + Y^2 = r^2 = \text{const}$ с центром в начале координат, и как точка одной из четырех равнобочных гипербол $X^2 - Y^2 = \mu^2$, с вершинами, отстоящими от начала координат на одно и то же ближайшее расстояние μ^0 .

Элементарные вещественные гиперболические биномы редуцируются вещественными экспонентами:

$$\begin{aligned} [\cosh(x) + \sinh(x)] &= e^x \\ [\cosh(x) - \sinh(x)] &= e^{-x} \end{aligned} \quad (23)$$

Элементарные комплексные гиперболические биномы редуцируются мнимыми экспонентами:

$$\begin{aligned} [\cosh(ix) + \sinh(ix)] &= e^{ix} \\ [\cosh(ix) - \sinh(ix)] &= e^{-ix} \end{aligned} \quad (24)$$

Переход от вещественных биномов $A+B$ к комплексным $A+Bi$ можно записать как перекрестное соответствие:

$$\begin{aligned} [\mu(\cosh(x) + \sinh(x))]^{\frac{1}{i}} &\asymp r[\cos(x) + i \sin(x)]; \\ [\mu(\cosh(x) - \sinh(x))]^{\frac{1}{i}} &\asymp r[\cos(x) - i \sin(x)]; \end{aligned} \quad (25)$$

Приведем примеры перекрестных соответствий между некоторыми конкретными биномами («числами») вещественного и комплексного пространств, придав им численные значения:

$$\left. \begin{aligned} &\left\langle \left(\cosh \frac{\pi}{100} + \sinh \frac{\pi}{100} \right)^i = (1.004.. + 0.031..) \right\rangle_R \asymp \\ &\asymp \left\langle \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 0.999.. + i0.031.. \right) \right\rangle_C ; \\ &\left\langle \left(\cosh \frac{\pi}{8} + \sinh \frac{\pi}{8} \right)^i = (1.078.. + 0.402..) \right\rangle_R \asymp \\ &\asymp \left\langle \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 0.923.. + i0.382.. \right) \right\rangle_C ; \\ &\left\langle \left(\cosh \frac{\pi}{4} + \sinh \frac{\pi}{4} \right)^i = (1.324.. + 0.868..) \right\rangle_R \asymp \\ &\asymp \left\langle \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 0.707.. + i0.707.. \right) \right\rangle_C \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

а далее и

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\langle [(\cosh(\frac{\pi}{2}) + \sinh(\frac{\pi}{2}))^i = (2.509.. + 2.301..)^i] \right\rangle_R \asymp \\
 & \asymp \left\langle \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i \right\rangle_C ; \\
 & \left\langle [(\cosh(\pi) + \sinh(\pi))^i = (11.591.. + 11.548..)^i] \right\rangle_R \asymp \\
 & \asymp \left\langle \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 \right\rangle_C ; \\
 & \left\langle [\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2})]^i = (55.663.. + 55.654..)^i \right\rangle_R \asymp \\
 & \asymp \left\langle \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2}) = (0 - i) \right\rangle_C ; \\
 & \left\langle [\cosh(2\pi) + \sinh(2\pi)]^i = (267.746.. + 267.444..)^i \right\rangle_R \asymp \\
 & \asymp \left\langle \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = (1 + 0) \right\rangle_C
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Правая часть ур.(27) представляет в форме комплексного бинома хорошо известные выражения для первых четырех степеней числа i . Те же результаты получаются в результате другой операции- прямого соответствия элементарных вещественных и комплексных числовых биномов:

$$\begin{aligned}
 & 1)(0+1)_R \square (0+i)_C; \quad 2)(-1+0)_R \square (-1+0)_C; \\
 & 3)(0-1)_R \square (0-i)_C; \quad 4)(1+0)_R \square (1+0)_C;
 \end{aligned} \quad (28)$$

5.Степенные функции и другие формы соответствия между множествами.

Множество натуральных логарифмов положительных (арифметических) чисел $X = \ln|x|$ удобно рассматривать как **вещественное множество**, происходящее от множества **арифметических чисел** $|x|$. В нем с необходимостью возникают отрицательные числа. Отсюда же возникают и множества **мнимых логарифмов арифметических чисел**, $iX = i \ln|x|$, $iY = i \ln|y|$ и **комплексное множество логарифмов**, $X+iY$. Хорошо известно логарифмическое тождество, связывающее два положительных числа l и t , а далее и переменную x с числом t

$$t^{\log_t l} = l; \quad t^{\log_t |x|} = |x| \quad (29)$$

Оно подразумевает последовательное выполнение двух противоположных действий (логарифмирование и потенцирование) с числом l или с переменной x , естественно не меняющее ни число, ни переменную. Основание логарифма t -произвольное арифметическое число. Отсюда следует логарифмическое тождество для натуральных логарифмов:

$$e^{p \ln|x|} = |x|^p; \quad e^{-p \ln|x|} = |x|^{-p}; \quad (30)$$

Существенно, что в этих уравнениях нами уже произведен **произвольный выбор** числа e как **основания логарифма**. Это тождество может быть записано для логарифмического множества с переменной $X = \ln|x|$:

$$e^{pX} = |x|^p; \quad e^{-pX} = |x|^{-p}; \quad (31)$$

Его можно записать и через гиперболические биномы с логарифмическим аргументом:

$$\cosh(pX) \pm \sinh(pX) = e^{\pm pX} = |x|^{\pm p}; \quad (32)$$

Эти биномы редуцируются не только «логарифмической» экспонентой, но и степенной функцией от **арифметического аргумента** $|x|$. От мнимых логарифмов iX также образуются гиперболические биномы, которые также редуцируются («сводятся в одночлен») двумя **эквивалентными** способами:

$$\cosh(ipX) \pm \sinh(ipX) = e^{\pm piX} = |x|^{\pm pi} \quad (33)$$

- экспонентой с логарифмическим аргументом X и степенной функцией, но уже с **арифметическим** аргументом $|x|$. Таким образом, существуют перекрестное соответствие вещественных и комплексных гиперболических биномов с логарифмическим аргументом:

$$[\cosh(pX) \pm \sinh(pX)]^i \asymp [\cosh(piX) \pm \sinh(piX)] \quad (34)$$

а далее и перекрестные соответствия:

$$\left\langle \cosh(pX) \pm \sinh(pX) = e^{\pm pX} = |x|^{\pm p} \right\rangle_R^i \asymp \left\langle \begin{array}{l} = \cosh(ipX) \pm \sinh(ipX) = e^{\pm ipX} \\ = \cos(pX) \pm i \sin(pX) = |x|^{\pm pi} \end{array} \right\rangle_C$$

т.е. следующие:

- 1) $\left\langle e^{\pm pX} \right\rangle_R^i \asymp \left\langle e^{\pm ipX} \right\rangle_C$ – двух экспонент с вещественным и мнимым логарифмическими аргументами.
- 2) $\left\langle e^{\pm pX} \right\rangle_R^i \asymp \left\langle (|x|^{\pm p})^i \right\rangle_C$ – экспоненты с вещественным логарифмическим аргументом и вещественной степенной функцией (с обычным, т.е. не логарифмическим, аргументом). (35)
- 3) $\left\langle x^{\pm p} \right\rangle_R^i \asymp \left\langle e^{\pm ipX} \right\rangle_C$ – вещественной степенной функции и экспоненты с мнимым логарифмическим аргументом.
- 4) $\left\langle x^{\pm p} \right\rangle_R^i \asymp \left\langle |x|^{\pm pi} \right\rangle_C$ – степенных функций с вещественным и мнимым аргументами.

Таким образом, возведение степенных функций с арифметическим аргументом в мнимую степень – еще один вариант перекрестного **соответствия вещественных и мнимых одночленов**.

Операции с вещественными степенными функциями в вещественном пространстве и операции со степенными функциями с мнимыми показателями степени в комплексном пространстве также просты, как и операции с экспонентами (вещественными и мнимыми).

Однако, в отличие от экспоненты степенная функция не может быть непосредственно представлена в виде бинома, т.е. разбита на сумму двух других степенных функций от общего аргумента. Это разбиение может быть осуществлено только косвенно-через обратный переход к экспоненте.

Заметим, однако, степенная функция всегда может быть разбита на сомножители, от каждого из которых можно перейти к его «собственной» экспоненте. Тогда в виде бинома может быть представлен логарифм степенной функции.

Резюмируя сказанное, мы можем записать и следующее соответствие между переменными двух различных множеств (арифметического и мнимых логарифмов):

$$|x|^i \asymp iX = i \ln |x|; \quad (36)$$

Это уравнение определяет операцию возведения арифметической переменной в мнимую степень именно как между алгебраическую **операцию соответствия**. Возникает также и соответствие , аналогичное соотношению (11):

$$(e^X)^i \rightsquigarrow e^{iX} \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} e^X &= \cosh(X) \pm \sinh(X) = \cosh(\ln|x|) \pm \sinh(\ln|x|); \\ e^{iX} &= \cos(X) \pm i \sin(X) = \cosh(i \ln|x|) \pm \sinh(i \ln|x|); \end{aligned} \tag{38}$$

Все соотношения (1)-(21) распространяются и на множество натуральных логарифмов арифметических чисел с переменной X .

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры перекрестного соответствия чисел вещественной и комплексной плоскостей. Придав, например, «логарифмическому» аргументу X значение $\pi/2$, находим, соответствующее ему арифметическое число:

$$e^X = e^{\pi/2} = 4.81047738097 \tag{39}$$

Таким образом арифметическому числу 4.81047738097 соответствует число логарифмического множества $\pi/2$. Придав арифметической переменной, x , численное значение $x = 4.81047738097$ получаем конкретное **соответствие двух чисел -одного, принадлежащего арифметическому множеству, и другого, принадлежащего множеству мнимых логарифмов арифметических чисел**:

$$(4.81047738097)_x^i \rightsquigarrow (i\pi / 2)_X,$$

С другой стороны арифметическому числу $x=\pi=3.14 \dots$ соответствует значение $X=1.14472988585\dots$.

Возведение этого числа в мнимую степень может трактоваться и как переход к **комплексному логарифмическому биному**:

$$(\pi)_x^i \rightsquigarrow e^{i1.14472988585} = \cos(1.14472988585) + i \sin(1.14472988585) = 0.413 + i0.9106$$

Теперь соответствия (27) могут быть записаны в степенной форме -через мнимую степень одного и того же арифметического числа:

$$\left. \begin{aligned} 1) & (4.81047738097)_x^i \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow [e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})) = (0 + i)_C]_X; \\ 2) & (4.81047738097)_x^{2i} \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow [(e^{i\pi}) = (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = (-1 + 0)_C]_X \\ 3) & (4.81047738097)_x^{3i} \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow [(e^{i\frac{3\pi}{2}}) = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2})) = (0 - i)_C]_X \\ 4) & (4.81047738097)_x^{4i} \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow [(e^{2i\pi}) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = (1 + 0)]_C \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

Возведение вещественной экспоненты в мнимую степень означает переход от арифметического множества к комплексному логарифмическому множеству. Аргумент тригонометрической функций, образующих мнимую экспоненту, относится именно к этому множеству.

Уравнение (40-2) было получено Эйлером в следующей форме:

$$e^{i\pi} = -1 \tag{41}$$

Оно объединяет и связывает четыре различные фундаментальные для математики числа, что и вызывает особое удивление [4,5]. Математические и физические материалы и даже художественный фильм по этой проблеме можно найти в Интернете.

Еще более удивительно, что через уравнение (41) выявляется необычная связь тех же фундаментальных чисел математики с физической постоянной тонкой структуры-безразмерной постоянной, определяемой важнейшими константами современной физики [6,7]. Смысл этой связи («физическая нумерология») непонятен ни физикам, ни математикам.

Уравнение (41) следует записывать и понимать как равенство, определяющее конкретную точку комплексной плоскости в двух формах-в форме комплексного бинома и редуцирующего его одночлена:

$$(e^{i\pi})_C = (-1+0)_C \quad (42)$$

Уравнение (40-2) устанавливает и соответствие двух конкретных числовых биномов -арифметического гиперболического и комплексного тригонометрического:

$$\langle (11.5919..+11.5487..) = (23.06.. = (e^\pi) \rangle_{\text{Re}}^i \rightsquigarrow \langle (e^{i\pi}) = (-1+0) \rangle_C$$

Такие соответствия могут быть установлены для всех биномов вещественного и комплексного пространств.

Уравнение (42) –это запись конкретного комплексного числа в двух формах -в редуцированной форме и в форме бинома, определяющего положение точки на комплексной плоскости.

В связи с этим следует напомнить, что комплексная экспонента определяется только суммой степенного ряда» и не имеет (в отличие от вещественной экспоненты) другого алгебраического определения.

Таким образом мы рассмотрели следующие операции перекрестного соответствия конкретных чисел разных множеств разных пространств:

- а) конкретных значений вещественного и комплексного биномов,
- в) конкретных значений вещественной и мнимой экспонент,
- с) значений вещественной и мнимой степеней конкретного арифметического числа.

Мнимые степени положительных (арифметических) чисел сводятся к конкретным комплексным биномам

6. Соответствие функций вещественного и комплексного квартовых множеств.

В работе [8] было замечено, что разложение вещественной экспоненты e^x в ряд разбивается на четыре вещественные же квартовые функции:

$$A(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}; \quad B(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}; \quad C(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}; \quad D(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}; \quad (43)$$

Они могут рассматриваться как самостоятельные «элементы», образующие два «квартовых множества» вещественных и комплексных функций, существенно более широкие, чем множества функций, производимых от самих экспонент. Каждый из этих элементов в вещественной плоскости изображается собственной U-или S-образной кривой.

Вещественная и комплексная экспоненты принадлежат к квартовым множествам.

Сами вещественные квартовые функции и происходящие от них гиперболические функции, экспоненты и степенные функции с аргументом x , изменяющимся в интервале $(-\infty < x < +\infty)$, не являются периодическими. Но именно от них удивительным образом происходят периодические синусоиды и косинусоиды с периодом (2π) .

Квартовые «элементы» позволяют ввести многие известные и неизвестные вещественные и комплексные функции и легко устанавливать их соответствие. Полученные нами ранее формулы, связывающие элементы вещественного и комплексного пространств

$$A(ix)=A(x); \quad B(ix)=iB(x); \quad C(ix)=-C(x); \quad D(ix)=-iD(x) \quad (44)$$

можно одновременно рассматривать и как операции прямого соответствия мнимых и вещественных чисел, а далее и функций мнимого и вещественного аргументов:

$$A(ix) \square A(x); \quad B(ix) \square iB(x); \quad C(ix) \square -C(x); \quad D(ix) \square -iD(x). \quad (45)$$

Перекрестные соответствия тригонометрических и гиперболических функций (уравнение (17)) легко «расшифровываются» именно через квартовые функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{cps}(x) &= [A(x) - C(x)] + [B(x) - D(x)] \\ \operatorname{cms}(x) &= [A(x) - C(x)] - [B(x) - D(x)] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cps}(ix) &= [A(x) + C(x)] + i[B(x) + D(x)] \\ \operatorname{cms}(ix) &= [A(x) + C(x)] - i[B(x) + D(x)] \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{cps}(ix) &= \operatorname{cosh}(x) + i \operatorname{sinh}(x) \\ \operatorname{cms}(ix) &= \operatorname{cosh}(x) - i \operatorname{sinh}(x) \end{aligned} \quad (47)$$

и ранее введенное соотношение (17) доказано.

Межалгебраические операции, осуществляемые через прямые и перекрестные соответствия.

Конечно, соответствие точек вещественной и комплексной плоскостей всегда и в разных формах неявно подразумевается и используется при операциях с комплексными числами.

Проще всего это заметить в операциях с полярными координатами точки-ее модулем, углом φ и его тригонометрическими функциями.

Очевидно, что в них всегда неявно принимается и используется прямое соответствие (9).

Очевидно, что вследствие прямого соответствия точек вещественной и комплексной плоскостей устанавливается и прямое соответствие **геометрически совпадающих** (совпадающих при совмещении плоскостей) кривых и ограничиваемых ими плоских фигур.

Так, например, геометрически совпадают кривые элементарных тригонометрических биномов вещественной и комплексной плоскостей, выражаемые уравнениями правой и левой частей уравнений (9), а, следовательно, и определяемые ими геометрические фигуры- **косинусоиды**.

Однако, алгоритмы алгебраических операций в комплексной плоскости с комплексными числами и в вещественной плоскости с вещественными числами, а тем более с вещественными биномами различаются.

Отсюда в математике возникают комбинированные операции в «параллельных» вещественном или комплексном пространствах с неявным использованием операций соответствия для взаимных переходов между ними.

Можно провести преобразования биномов (пар чисел) в вещественной плоскости через операции с комплексными биномами, а также и преобразования комплексных биномов через операции с вещественными биномами (парами чисел), используя различные операции соответствия.

Естественно, что сказанное распространяется и на операции с функциями и функциональными биномами.

При этом устанавливаются и более сложные соответствия исходных и получаемых в результате

проведенных операций геометрических кривых и плоских фигур.

По существу именно такие **сложные межалгебраические операции** в неявной форме широко используются в математике для получения «имеющих смысл результатов в вещественных числах».

Для того, чтобы обратить на это внимание теоретиков и практиков полезно им дать им общее название, например, **трансляции**.

Выводы

1) Алгебру комплексных чисел следует рассматривать как специфическую **алгебра комплексных биномов**, с алгоритмом умножения, преобразующим произведение биномов в новый бином.

2) Биномы (вещественные и комплексные) могут быть различными способами представлены через относительные величины в «приведенной» форме (в числовой, а также в функциональной). а далее сведены в одночлен (редуцированы).

3) Между вещественными и комплексными биномами и между редуцирующими их вещественными и мнимыми одночленами существуют соответствия, определяемые **межалгебраическими операциями соответствия**, относящимися к теории множеств.

4) Точки вещественной и комплексной плоскостей, определяемые одной и той же парой вещественных чисел, образующей вещественный и комплексный биномы, находятся в **прямом соответствии** друг с другом, устанавливаемом через **межалгебраическую операцию прямого соответствия**.

5) Возведение в мнимую степень является **межалгебраической операцией перекрестного соответствия**. Она устанавливает **перекрестные** соответствия вещественных гиперболических и тригонометрических комплексных биномов, а также вещественных тригонометрических и комплексных гиперболических биномов.

Эти соответствия осуществляются как непосредственно через операции с самими биномами, так и опосредованно - через возведение в мнимую степень редуцирующих биномов одночленов: вещественной экспоненты (формула Эйлера) и вещественного тригонометрического одночлена.

7) Рассмотрены **соответствия** экспонент (с вещественными и мнимыми показателями степени) и степенных функций (с вещественными и мнимыми показателями степени), а также соответствия собственно степенных функций с вещественным и мнимым показателями степени.

8) Приведены примеры конкретных соответствий **числовых (и в том единичных) биномов вещественной** и комплексной плоскостей.

9) Проанализирована известная и широко обсуждаемая формула Эйлера, «объединяющая» четыре фундаментальных числа математики.

10) Соответствия вещественных и мнимых элементарных квартовых функций («элементов» квартовых множеств) позволяют устанавливать соответствия широкого множества функций, принадлежащих к квартовым множествам.

11) **Соотношения** между биномами одного и того же множества, устанавливаемые через операции с соответственными им биномами другого множества, следует считать сложными межалгебраическими **соответствиями**.

Литература.

1. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М.Наука.1986.117с.
2. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. Издат.физ.мат.лит.М.1963.192с.
- 3.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.т.2 Санкт-Петербург.1997г.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.Наука.1984.
5. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. Наука.1966.
6. А.К. Лоренц. Теоретическая и математическая физика.т.18, 3,427-428, 1974.
7. Википедия (интернет).Постоянная тонкой структуры.
8. Kokotov Yu. A. Elementary quartic functions and Sets thay form. Международный научно-исследовательский журнал. 2018, 3(69). р.18. Екатеринбург.

Lesnyh Yu.I.

*doctor of physical and mathematical sciences,
professor of the department of physics,
Samara State Technical University,*

MODEL OF NUMERICAL ANALYSIS OF RELAXATION OF RESIDUAL METAL STRESSES

Лесных Ю.И.

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики,
Самарский государственный технический университет*

МОДЕЛЬ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТАЛЛА

Summary: On the basis of experimental researches of "strain ageing" of the reinforced details at vibration action the model for a stress relief numerical analysis is offered. The method of transformations of a distribution function of residual stresses taking into account the equations of evolution of flaws in the conditions of exterior superficial vibrations is used. The method can be extended on other cases of change of volages in details: origination and a stress relief at thermomechanical machining, origination of flaws for fatigue.

Аннотация: На основе экспериментальных исследований «старения» упрочненных деталей при виброакустическом воздействии предложена модель для численного анализа релаксации напряжений. Используется метод преобразований функции распределения остаточных напряжений с учетом уравнений эволюции дефектов в условиях внешних поверхностных вибраций. Метод можно обобщить на другие случаи изменения напряжений в деталях: возникновение и релаксация напряжений при термомеханической обработке, возникновение трещин вследствие усталости и т.п.

Key words: relaxation, hardening, residual stress, defects, thermomechanical treatment.

Ключевые слова: релаксация, упрочнение, остаточное напряжение, дефекты, термомеханическая обработка.

1. Экспериментальное и физическое обоснование модели

Виброакустическое воздействие на упрочненные детали вызывает перераспределение напряжений и понижает уровень их неоднородностей [1, 2]. При этом сохраняется наклеп поверхности детали; это дает определенные преимущества по сравнению с другими способами создания устойчивой формы – отжигом или статическими циклическими

нагрузками. Использование резонансного поглощения энергии дает возможность контроля и управления процессом «старения».

Проведены лабораторные и производственные исследования виброакустического воздействия на снижение остаточных напряжений.

На рисунке 1 приведена схема промышленной установки, реализованной на заводе «Азотремаш» г. Тольятти [3]

Виброобработке подвергался маложесткий вал, изготовленный из стали 12х18Н10Т аустенитного класса: длина вала 5400 мм, диаметр 38 мм. Изгибно-крутильные колебания создавались двигателем мощностью 2,2 кВт, частота колебаний изменялась в пределах 50 – 100 Гц. В процессе виброоб-

работки максимальная температура в пучностях достигала 94-95°С при общем нагревании вала от 18 до 35°С. Диагностические результаты испытаний положительны. Подробно результаты эксперимента изложены в работах [3, 4]. Здесь отметим два механизма воздействия на распределение напряжений.

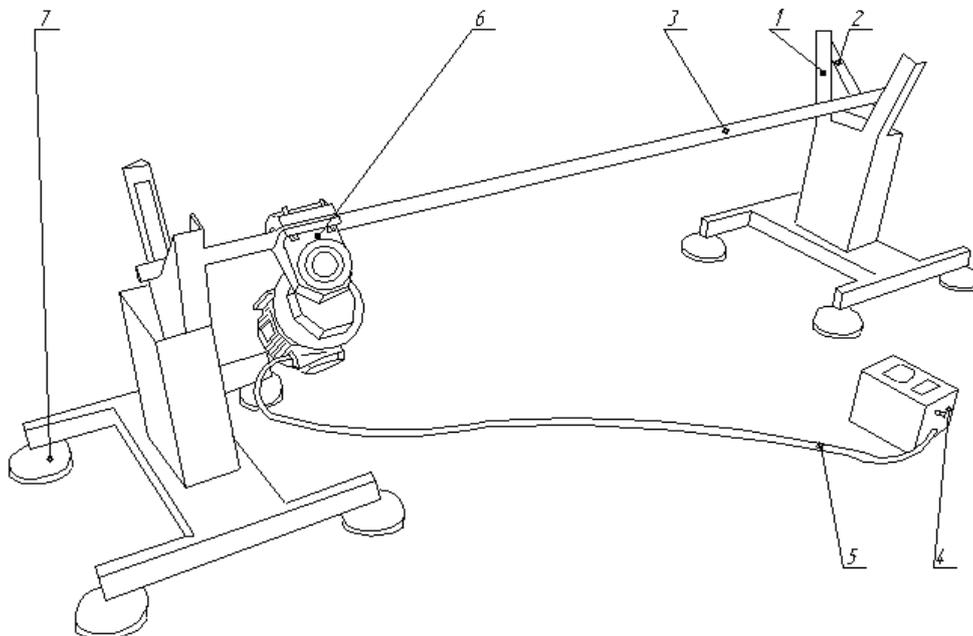


Рис. 1. Схема вибрационной обработки: 1 – стойка; 2 – прорезиненные подложки; 3 – виброобрабатываемый вал; 4 – частотный преобразователь; 5 – провода; 6 – вибратор; 7 – демпфирующий элемент

При виброакустическом воздействии энергия выделяется в поверхностном упроченном слое, толщина которого не превышает нескольких миллиметров. Механические колебания создают внутри зерен градиенты температур и напряжений, что приводит к рождению, аннигиляции и перемещению дислокаций, созданию новых дефектов вблизи концентраторов напряжений.

Повышение температуры в упроченном слое снижает критические напряжения, которые необходимо преодолеть, чтобы изменить распределение напряжений.

Для теоретического анализа процессов, приводящих к изменению распределения напряжений необходимо определить связь и соотношения между различными уровнями: движущиеся дислокации образуют стенки, клубки, которые превращаются в более сложные структуры – субблоки и т.д., причем многообразные процессы происходят одновременно. Принципиальными для предлагаемой модели являются следующие моменты.

Распределение напряжений в исходном состоянии $f_0(\sigma, 0)$ считаем известным. Сам вид функции $f_0(\sigma, 0)$ не имеет принципиального значения с точки зрения кинетики, так как система в процессе эволюции как бы «забывает» о начальном состоянии, что согласуется с основными положениями

теории вероятностных процессов. Задана также плотность концентраторов напряжений $N[1/m^3]$.

Виброобработка генерирует дислокации, а также приводит к разрушению части дефектов типа стенок, оборванных границ, субблоков и т.п.; последнее также увеличивает число дислокаций, которые являются причиной дальнейшей эволюции. Скорость этого этапа зависит от мощности источника вибраций. Определив скорость изменения плотности дислокации, можно найти зависимости распределения $f(\sigma, t)$ в зависимости от времени.

При достаточно большой плотности дислокации $\rho > \rho_1$ в центрах концентрации напряжений создаются зародыши роста напряжений, величина которых со временем станет больше критического значения, $\sigma > \sigma_{кр}$ при котором и происходит локальное перераспределение напряжений, уменьшение их дисперсии.

Области, в которых произошло перераспределение напряжений «возвращается» в распределение $f(x, t)$; ($f(x, t) \neq f(x, 0)$ за счет предыдущей эволюции).

Схема взаимодействий в диссипативной системе представлена на рис. 2.

При виброобработке большая часть подводимой извне энергии $P(\omega, t)$ расходуется на нагрев

поверхности детали и самой детали, часть энергии $\gamma(t)P$ расходуется на создание и рост новых напряжений; в конечном итоге она тоже превращается в тепло. Функция преобразования $g(x, y, t)$ создает новые напряжения, которые эволюциони-

руют и создают распределение $\varphi(y, t)$. Неравновесные напряжения, достигнув критического значения за счет распада дефектов вблизи концентратора, возвращаются в квазиравновесное распределение $f(x, t)$. Эволюция $f(x, t)$ идет непрерывно к более устойчивому распределению напряжений.

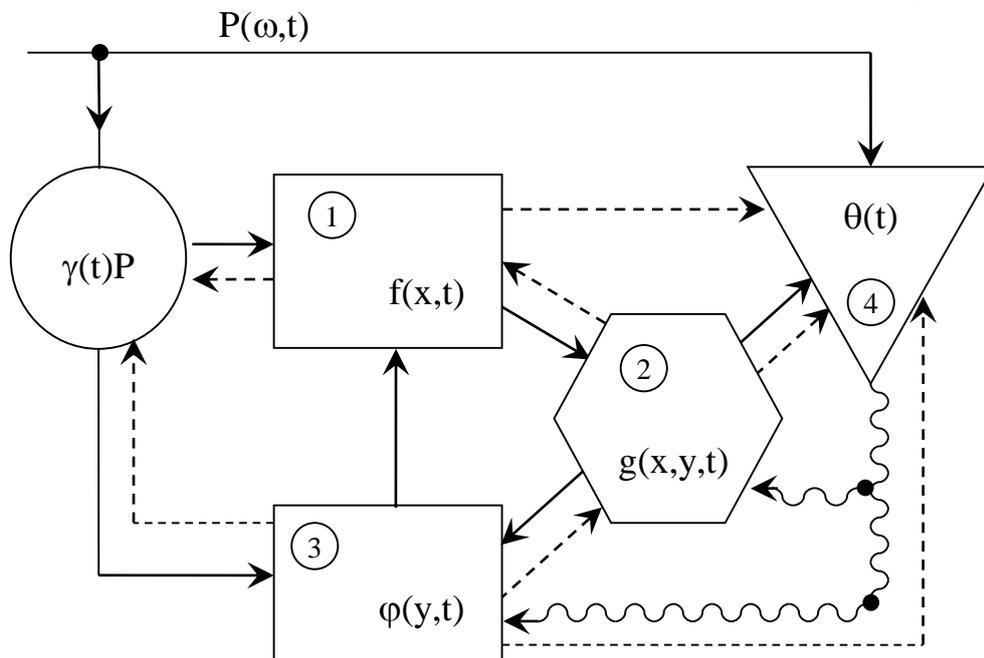


Рис. 2. Модель релаксации остаточных напряжений при виброобработке: 1 – квазиравновесное состояние, 2 – мультипликатор, 3 – неравновесное состояние, 4 – резервуар для избыточной энтропии, $\rho(\omega, t)$ – внешнее воздействие, $\gamma(t)$ – восприимчивость, $f(x, t)$, $g(x, y, t)$, $\varphi(y, t)$ – функции распределение вероятностей, сплошные линии – связи прямого действия, пунктирные линии – связи косвенного действия (через время τ), волнистые линии – возможные, но не необходимые взаимодействия

2. Уравнения кинетики напряжений

При составлении кинетических уравнений удобно ввести переменную

$$x = \sigma_m^{-2} \sigma^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

где σ, σ_m – отклонение и максимальное отклонение напряжений от среднего значения $\bar{\sigma}$.

В этом случае мы используем энергетическое представление, так плотность энергии напряженного состояния $\varepsilon \sim E^{-1} \sigma^2$.

Исходное распределение выберем в виде

$$f(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Такое равномерное распределение по x соответствует большей неоднородности по σ , так как $f(\sigma) \sim 2 \sigma f(x)$. Распределение может быть любым, для самого процесса релаксации это не имеет существенного значения; в нашем случае подчеркивается неравномерность начального распределения напряжений (рис.3)

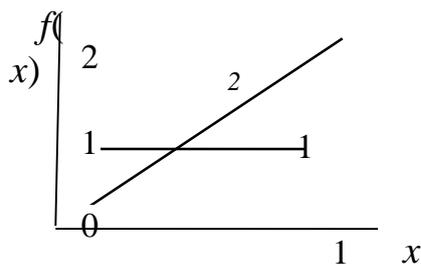


Рис. 3. Распределение напряжений: 1 – для x , 2 – для $\sigma_m^{-1} \sigma$

$$\bar{x} = 0.5; \quad D(x) = 1/12;$$

$$\bar{\sigma}/\sigma_m = 2/3, \quad D(\sigma/\sigma_m) = 1/18.$$

При вибрациях движения дислокаций и других дефектов, имеет в основном обратимый характер до определенного значения $X < X_1$. Переход в новое состояние вблизи концентратора напряжений носит, активационный характер. Примем, что

$$g(x, y, t) \equiv g(x, 0, t) = D^{-1} \exp\left(-\frac{x_1(t) - x}{D}\right). \quad (3)$$

Формула (3) имеет вид формулы Больцмана

$$W = \exp(-\Delta E / k_b T), \quad (4)$$

где ΔE – энергии активации. В нашем случае роль энергии теплового движения $k_b T$ играет энергия случайных воздействий на линейные и поверхностные дефекты.

Возможность такой интерпретации следует из теории случайных процессов [5], а необходимость связана с тем, что тепловое движение при температуре, значительно меньше температуры отжига, не может привести к перераспределению напряжений в сравнительно короткое время. Легко показать, что в таком случае

$$D = \gamma P \tau (N_1 \delta S \sigma_m^2 / E)^{-1}, \quad (5)$$

где $\tau \sim \omega^{-1}$ – характерное время процессов, вызывающих неупругое смещение дефектов детали; N_1 – плотность концентраторов напряжений, $\delta - S$ – объем упрочненной части.

Нормировка в (3) выбрана из условия

$$\int_0^{x_1} g(x, t) dx = 1, \quad D^{-1} x_1 \gg 1. \quad (6)$$

Последнее означает, что вероятность перехода для $0 \leq x \leq x_1$ равна 1.

При вычислении $\varphi(y, t)$ удобно определить переменную как

$$y = x - x_1, \quad 0 \leq y \leq x_2 - x_1, \quad (7)$$

где X_2 – критическое значение, при котором разрушается концентратор напряжения и соответствующая область переходит в распределение $f(x, t)$. X_1 и X_2 – зависят от времени через зависимость критического напряжения от температуры $\theta(t)$. Обычно для критического напряжения принимают, закон Аррениуса $\sigma_c = \sigma_0 e^{-W/RT}$. Так как $x_c \sim (\sigma_c^2 - \sigma^2)$, то, учитывая, что $\Delta\sigma = \sigma_c - \bar{\sigma} \ll \sigma_c$ и $\Delta T \ll T_0$ получим после несложных преобразований

$$x_{1,2} = x_{1,2}(0) - b_{1,2} \theta, \quad b_{1,2} = \frac{2W}{RT_0} \frac{\sigma_{c1,2}}{\sigma_m - \sigma}. \quad (8)$$

W – молярная энергия активации. Из (8) следует, что область определения убывает с увеличением θ

$$x_2 - x_1 = (x_2(0) - x_1(0)) \left(1 - \frac{2W}{RT_0} \theta\right). \quad (9)$$

Отметим, что изменение $x_1(t)$ является весьма существенным, так как x_1 входит в показатель экспоненты определения $g(x, y; t)$ и $\sigma_m - \bar{\sigma} \ll \sigma_{c1}$, в то время как изменение области определения y мало, и им можно пренебречь.

Чтобы найти зависимость $\theta(t)$ следует решить уравнение теплопроводности. Так как температура детали изменяется медленно по сравнению со скоростью упругих взаимодействий, то решение элементарно и имеет вид

$$\theta(t) = \theta_0(1 - e^{-at}), \quad (10)$$

где

$$\theta_0 = \frac{P\delta}{\alpha T_0}, \quad a = \frac{\alpha\tau}{\delta\rho C_p}, \quad t = \frac{t}{\tau}. \quad (11)$$

Здесь C_p – теплоемкость, ρ – плотность, T_0 – начальная температура, α – коэффициент теплообмена, δ – толщина упрочненного слоя.

y – зависит от времени. Характер зависимости можно найти, если принять более или менее реалистические предположения. Для определенности примем, что

$$dy = \tau_1^{-1} dt, \quad y = \tau_1^{-1}(t - t') \quad (12)$$

Используя уравнение баланса, можно показать, что, $\tau_1^{-1} = D\tau^{-1}$, следовательно, уравнение (12) имеет вид

$$y = D(t - t'), \quad 0 \leq y \leq y_{\max} \leq x_2(t) - x_1(t) \quad (13)$$

Здесь t – безразмерное время, как и в формуле (11), y_{\max} – максимальное значение y в момент времени t . Напомним что, функция $g(x, t)$ переводит значение x из области $0 \leq x \leq 1$ в состоянии $y=0$ в момент времени $t' < t$, из этого состояния y растет в соответствии с (13) в течение времени $t - t'$. Линейная зависимость (13) означает, что скорость роста энергии дефектов вблизи концентратора пропорциональна плотности подводимой энергии. С вычислительной точки зрения удобно определить функцию $\varphi(y, t)$ в параметрической форме. С учетом формулы (13) получим

$$\varphi(t, t - t') = \int_0^1 f(x, t - t') g(x, t - t') dx, \quad 0 < t' < t. \quad (14)$$

Напомним, что, так как x_1 зависит от времени, то от времени зависит не только $f(x, t)$, но и $g(x, 0; t)$.

Уравнения (13), (14) определяют, в параметрической форме точки распределения $\varphi(y_{\max}, y; t)$. Для фиксированного момента времени при $t' = 0$ из (13) находим $0 < y_{\max} \leq x_2 - x_1$, соответственно (14) дает $\varphi(y_{\max}, t)$. Изменяя $0 < t' \leq t$ из (13), (14) получим распределение

$$\varphi(y, t) \quad 0 \leq y \leq y_{\max} \leq x_2 - x_1 \quad (15)$$

Примем, что при $y \geq x_2 - x_1$ происходит переход областей объекта из этого состояния в исходное распределение, то есть в состояние $0 \leq x \leq 1$, причем в самое начало распределения. Для определенности будем считать, что область значения x для этого перехода $0 \leq x \leq D$. Сделанный выбор достаточно произвольный, но очевидно, что после разрушения напряжения в концентраторе должно реализовываться более устойчивое состояние, чем исходное. Для функции распределения в области $0 \leq x \leq 1$. С учетом вышесказанного можно записать

$$f(x, t) = f(x, 0) - \int_0^t f(x, \zeta) g(x, t') dt' + D^{-1} \theta(D - x) \int_0^t \varphi(y = x_2 - x_1; t') dt'. \quad (16)$$

Здесь функция эта

$$\theta(D - x) = \begin{cases} 1, & x \leq D, \\ 0, & x > D. \end{cases} \quad (17)$$

Во втором интеграле фактически, $\varphi(x, \zeta) = 0$ если $\zeta \leq t_2$, где t_2 – время, при котором впервые $y_{\max}(t_2) = x_2(t_2) - x_1(t_2)$. В связи с формулами (13) в качестве безразмерного времени удобно выбрать величину $t = t / \tau$.

Таким образом, мы получили замкнутую систему уравнений для функций распределения с учетом соотношений (11), (8) и областями определения x и y (2) и (7).

Эту систему соотношений исследуем численным методом.

Отметим, что коэффициент, характеризующий части внешней энергии, расходуемой на эволюцию дефектной структуры, зависит от времени. Из уравнения баланса энергии, используя определения безразмерных величин, получим: (3), (13), (14), (16)

$$\kappa = (\gamma P)^{-1} P_{def} = D^{-1} \int_0^1 (x_1 - x) g(x, t) f(x, t) dx + \int_0^{y_m} \varphi(y, t) dz. \quad (18)$$

Следует обратить внимание на особенность преобразования (14), связанную с параметрическим определением зависимости от y . Эта формула, по сути, имеет вид свертки, которую сложно выразить в явной форме. Действительно вследствие формул (13), (16) можно сказать, что $f(x, t - t') = f(x; y_{\max}, y)$, где

$$\varphi(y_{\max}, y) = \int_0^1 f(x, y_{\max}, y) g(x, y_{\max}) dx \quad (19)$$

2. Результаты численного исследования

Для вычислений примем, что

$$D=0,1; \theta=0,2; b=3; x_1=2; x_2=4; 0 < y < 2. \quad (20)$$

Вычисления проведены для системы уравнений, полученных в предыдущем разделе с использованием программы Mathematica.

Отметим, что температура растет сравнительно медленно, так как $a \sim 10^4 \div 10^5$ $\tau \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$. На

начальном этапе скорость процесса релаксации очень мала до температур порядка θ , потому этот этап не оказывает существенного влияния на процесс в целом. Приведем результаты для $\theta = \theta$, когда $x_1 = 1,4$.

На рис. 4 представлено распределение $\varphi(y, t)$ в процессе роста максимального значения y_{\max} до $y_{\max} = 2$ для разных моментов времени.

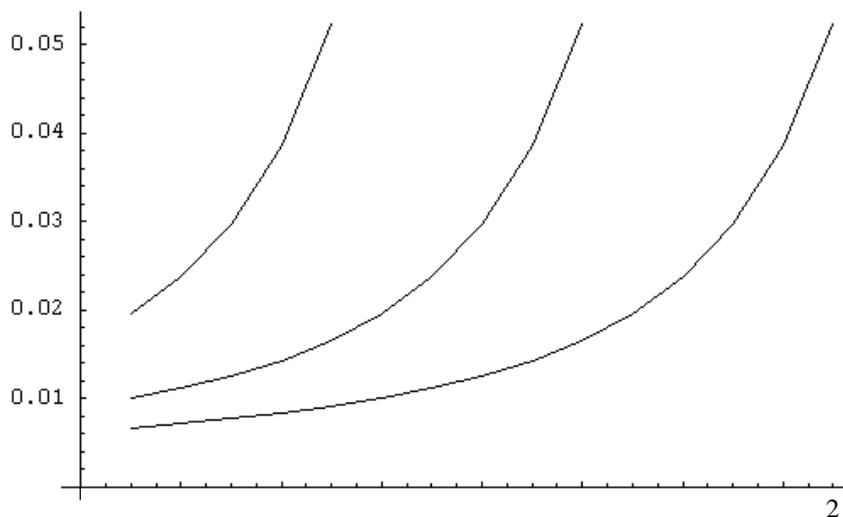


Рис.4. Распределение $\varphi(y, t)$: 1 – $t=5$; 2 – $t=10$; 3 – $t=15$

При $t \leq y_{\max} \leq 2$ изменение функции $f(x, t)$ определяется выражение (3). Если $t \geq 15$, то $f(x, t)$ определяется по формуле (7).

На рис. 3 показана эволюция функций распределения во времени. Из рисунка следует, что дисперсия напряжений в процессе релаксации умень-

шается, $f(x, t)$ сжимается к началу координат. Одновременно уменьшается уровень $\varphi(y, t)$, то есть уменьшается число областей, находящихся в неравновесном состоянии. Очевидно, что полностью процесс завершается, когда $\varphi(y, t) = 0$. Строго говоря, $\varphi(y, t) \neq 0$, но практически достаточно, чтобы выполнялось условие $\varphi(y, t) \ll \varphi(y, t=15)$.

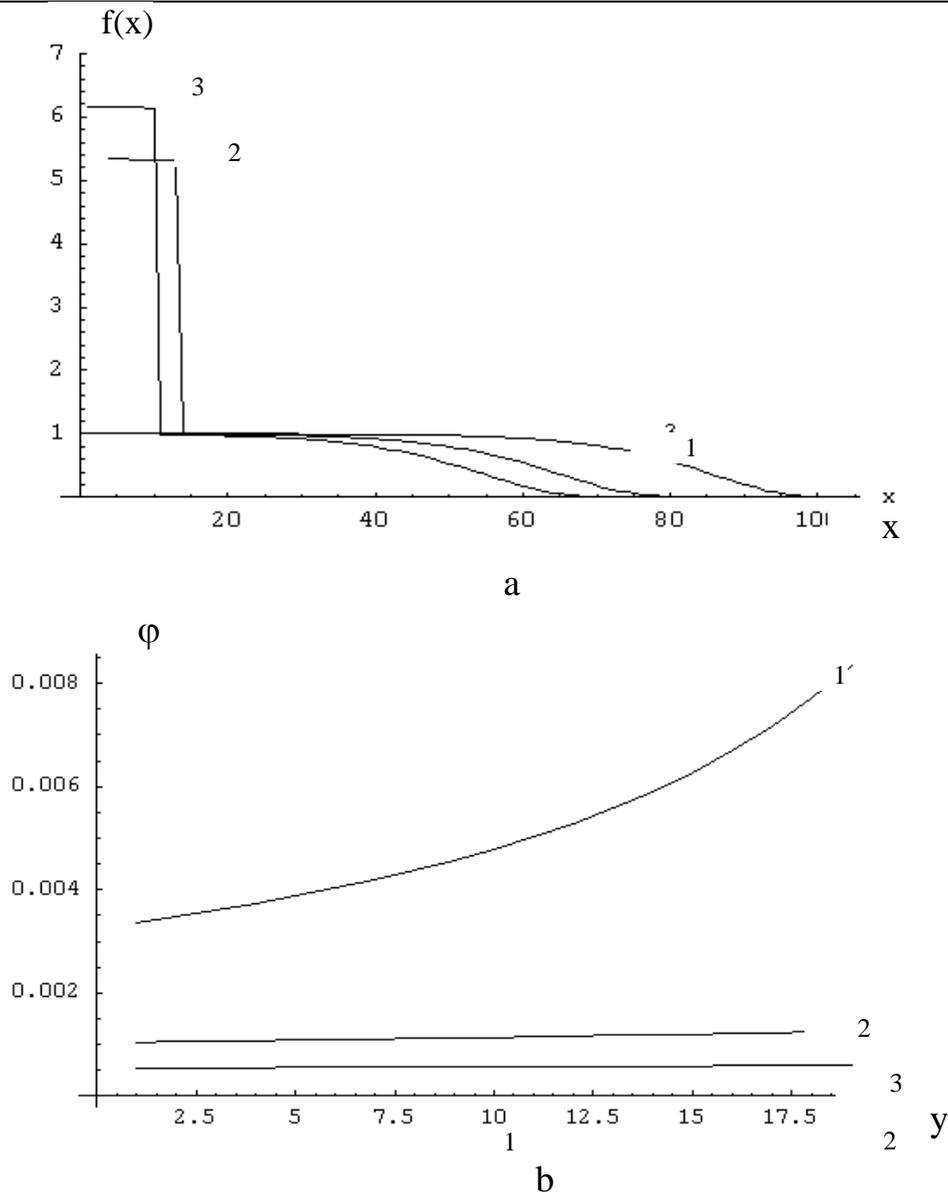


Рис. 5. Эволюция функций распределения во времени:
 $a - f(x), b - \varphi(y)$; 1 - $t=30$; 2 - $t=100$; 3 - $t=200$

В итоге мы получим для $t \gg 200$ принципиально иное новое распределение напряжений: из рис. 5а следует, что уровень и дисперсия остаточных напряжений существенно понижается.

На рис. 6 представлена зависимость от времени коэффициента «полезного действия» k , вычисленного по формуле (18). k характеризует часть

энергии, виброколебаний, расходуемую на создание и необратимое перемещение дефектов. Из рис. 6 следует, что k уменьшается со временем, то есть с уменьшением уровня остаточных напряжений.

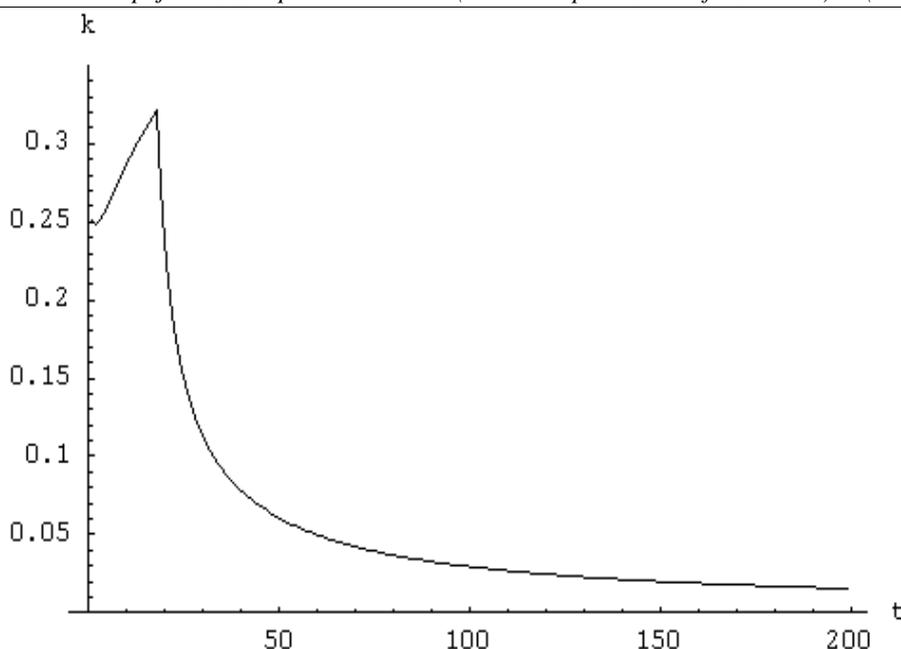


Рис.6. Зависимость коэффициента k от времени

3. Заключение

Рассмотренная задача демонстрирует достоинства предлагаемого метода преобразования функций распределения. Неоднородности в распределении остаточных напряжений, фиксированные за счет предварительной обработки, дают возможность структурировать объект исследования, разделив его на $N \gg 1$ частей. Возбуждения носят активационный характер. Эти две характерные особенности здесь являются достоинствами, так как позволяют сформулировать задачи в терминах функций распределения. При решении задачи с применением нелинейных дифференциальных уравнений эти же обстоятельства создают трудности, часто неразрешимые.

Рассмотренную схему анализа открытой диссипативной системы можно применить для решения широкого класса задач, но ее реализация возможна при достаточно гибком применении средств вычислительной техники. Математические преобразования имеют ряд особенностей, которые следует рассмотреть отдельно. Принципиально важным являются следующие обстоятельства. В качестве начальных условий задаются внешние воздействия и начальная функция распределения напряжений, выбор вида, который достаточно произвольный, так как сам процесс эволюции всегда приведет к более равновесной функции распределения слабо коррелированной с исходной.

Следует определить функцию, характеризующую переход системы в неравновесное состояние, а также определить характер перехода из возбужденного в основное состояние, следует задать поведение структурных частей в исходном и возбужденном состоянии.

Указанные выше моменты полностью определяют эволюцию системы. Далее можно построить функции распределения, необходимые по условиям самой задачи, и проследить кинетику исследуемого объекта. Система в общем случае может иметь несколько уровней состояния. Вычисления могут быть довольно сложными с технической точки зрения, но решение можно получить и для сложных явлений.

Проблемы, связанные с определением точек бифуркации, устойчивости в большем в данном методе переносятся на структуру взаимных связей исследуемого объекта. Это позволяет записать математические соотношения, определяющие эволюцию системы. Формулы дают количественные результаты для тех процессов, для которых качественные взаимосвязи определены из экспериментальных или общих теоретических представлений.

Литература

1. Рагульских К.М. Вибрационное старение / Под ред. К.М. Рагульских // – Л.: Машиностроение, 1987. – 72 с.
2. Драчев О.И., Скиданенко В.И., Тисенко В.Н. Управление уровнем остаточных напряжений в маложестких деталях / Драчев О.И., Скиданенко В.И., Тисенко В.Н. // Прогрессивные технологические процессы в машиностроении. – Л.: 1990.
3. Бойченко О.В., Расторгуев Д.А. Виброобработка с наложением комплексных колебаний в техпроцессе изготовления маложесткого вала / Бойченко О.В., Расторгуев Д.А. // Труды Всероссийской конф. «Прогрессивные технологические процессы в машиностроении», г. Тольятти, 2002. – Вестник № 1 АМИ.

4. Лесных Ю.И., Мелешко И.В. Модель релаксации напряжений при виброобработке (статья). / Лесных Ю.И., Мелешко И.В. // Электронный

научный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ» 420 <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/037.pdf>

5. Леви П. Статистические процессы и броуновское движение. / Леви П. // – М.: Наука, 1972.

Mehtiyev R.K.

*candidate of Physical and Mathematical sciences, professor
cathedral of mechnology of materials, Azerbaijan Technical University*

MODELING OF A SHIFT IN THE BODY OF BINDING AND INCLUSIONS OF A COMPOSITE WEARED BY THE TWO-CERTIFIED RECTANGULAR CRACKS

Мехтиева Рафаил Керим оглу

*кандидат физико – математическое наук, доцент кафедры
Технология материалов, Азербайджанский Технический Университет*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНОРОДНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ КОМПОЗИТА

Summary: We consider an elastic medium weakened by a doubly periodic system of circular holes filled with washers of a homogeneous elastic material whose surface is covered by a cylindrical film. The medium (binder) is weakened by two periodic systems of rectilinear cracks with connections between the shores in the end zones. General representations of solutions that describe a class of problems with a doubly periodic distribution of stresses outside circular holes and rectilinear cracks are constructed. Satisfying the boundary conditions on the contours of the circular holes and the shores of the cracks, an infinite algebraic system and an explicitly singular integral equation are obtained. Then using direct methods, the solution of the integral equation is reduced to a finite algebraic system. The numerical implementation of this method is given in IBM. The stress intensity factors are calculated as a function of the geometric parameters of the medium under consideration.

Аннотация: Рассматривается упругая среда, ослабленная двояко периодической системой круглых отверстий, заполненных шайбами из однородного упругого материала, поверхность которых покрыта цилиндрической пленкой. Среда (связующее) ослаблена двояко периодическими системами прямолинейных трещин со связями между берегами в концевых зонах. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений вне круговых отверстий и прямолинейных трещин. Удовлетворяя граничным условиям на контурах круговых отверстий и берегах трещин, получена бесконечная алгебраическая система и явно сингулярное интегральное уравнение. Затем используя прямые методы, решение интегрального уравнения сведено к конечной алгебраической системе. Численная реализация изложенного способа приведена на IBM. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в зависимости от геометрических параметров рассматриваемой среды.

Ключевые слова: двоякопериодическая решетка, толщина покрытия, волокна–покрытия, покрытие–связующее, средние напряжения, линейные алгебраические уравнения, сингулярные уравнения.

Keywords: doubly periodic lattice, coating thickness, coating fibers, coating-binder, average stresses, linear algebraic equations, singular equations.

Постановка задачи. Задача о трещины является важной проблемой теории прочности. Отметим, что в настоящее время актуальны двояко периодические задачи механики разрушения. Постановка задачи о трещины существенно расширяет первоначальную концепцию А. Гриффитса. Интерес к исследованию трещинообразования в композитах напрямую связан с проектированием новых высокопрочных материалов. В связи с этим разработка математических моделей трещин в композитах весьма актуальна. Актуальность таких исследований вызвана широким использованием в технике конструкций и изделий из композиционных материалов. Исследования по разработке математических моделей теоретически описываемого напряженно деформируемого состояния армированного композита вблизи включения при сдвиге и трещин практически отсутствуют.

Пусть двоякопериодическая решетка с круговыми отверстиями, имеет радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках:

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2; \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \omega_1 = 2; \quad \omega_2 = \omega_1 h e^{i\alpha}; \quad h; > 0; \quad \text{Im} \omega_2 > 0. \quad (1)$$

Круговые отверстия решетки заполнены шайбами (волокнами) из инородного упругого материала, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой. Решетка (связующая среда) ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных трещин (рис. 1). Берега трещин свободны от внешних усилий. В решетке имеют место средние напряжения $\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty$ (сдвиг на бесконечности).

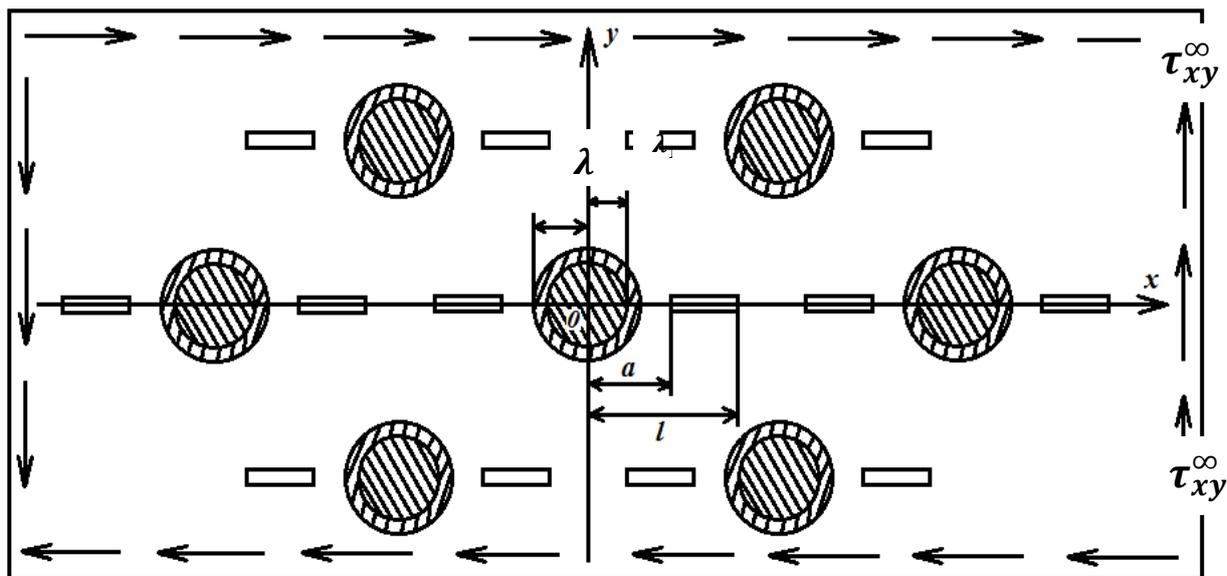


Рис. 1. Расчетная схема задачи трещины сдвига в композита

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид [1, 4].

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{b|\omega_{mn}} &= (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{t|\omega_{mn}}, \quad (u + iv)_{b|\omega_{mn}} = (u + iv)_{t|\omega_{mn}}, \\
 (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{t|\Omega_{mn}} &= (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{s|\Omega_{mn}}, \quad (u + iv)_{t|\Omega_{mn}} = (u + iv)_{s|\Omega_{mn}},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0$ на контурах отверстий,
 $\sigma_y - i\tau_{xy} = 0$ на берегах трещин коллинеарных оси абсцисс.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области S , занятой связующей средой, напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2 . Напряжения и смещения представим [5] через потенциалы Колосова– Мухелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$.

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{i\theta}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]
 \tag{3}$$

Смещения связаны с комплексными потенциалами соотношениями, являющимися непосредственными следствиями приведенных выше формул:

$$\begin{aligned}
 2\mu(u + iv) &= e^{-i\theta}[k\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \Psi(z)], \\
 \Phi(z) &= \varphi'(z); \quad \Psi(z) = \psi'(z); \quad (z = x + iy).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{— плоская деформация} \\ \frac{3 - \nu}{(1 + \nu)} & \text{— плоское напряженное состояние} \end{cases}$$

μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона, r, θ — полярные координаты.

Задача о напряженно–деформированном состоянии кусочно–неоднородной среды в плоскости $x = const$, как видно, сводится к построению каждой из областей двух функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по заданным условиям на границах сред. Условия совершенного контакта на границах фаз выражается через равенство напряжений и смещений при $z = \tau$. Согласно формулам (3) эти условия, например, на границе волокна–покрытия ω_{mn} и покрытия– связующее S_{mn} (где индексы $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ определяют условия на контуре m, n –го волокна, координаты которых равны P_{mn}) [1, 6].

$$\Phi_b(\tau_1) + \overline{\Phi_b(\tau_1)} - [\bar{\tau}_1\Phi'_b(\tau_1) + \Psi_b(\tau_1)]e^{2i\theta} = \Phi_t(\tau_1) + \overline{\Phi_t(\tau_1)} - [\bar{\tau}_1\Phi'_t(\tau_1) + \Psi_t(\tau_1)]e^{2i\theta}, \tag{5}$$

$$-\kappa_b \overline{\Phi_b(\tau_1)} + \Phi_b(\tau_1) - [\overline{\tau_1 \Phi'_b(\tau_1)} + \Psi_b(\tau_1)] e^{2i\theta} = \frac{\mu_b}{\mu_t} \left\{ -\kappa_t \overline{\Phi_t(\tau_1)} + \Phi_t(\tau_1) - [\overline{\tau_1 \Phi'_t(\tau_1)} + \Psi_t(\tau_1)] e^{2i\theta} \right\}, \quad (6)$$

$$\Phi_t(\tau) + \overline{\Phi_t(\tau)} - [\overline{\tau \Phi'_t(\tau)} + \Psi_t(\tau)] e^{2i\theta} = \Phi_s(\tau) + \overline{\Phi_s(\tau)} - [\overline{\tau \Phi'_s(\tau)} + \Psi_s(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (7)$$

$$-\kappa_s \overline{\Phi_s(\tau)} + \Phi_s(\tau) - [\overline{\tau \Phi'_s(\tau)} + \Psi_s(\tau)] e^{2i\theta} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \left\{ -\kappa_t \overline{\Phi_t(\tau)} + \Phi_t(\tau) - [\overline{\tau \Phi'_t(\tau)} + \Psi_t(\tau)] e^{2i\theta} \right\}, \quad (8)$$

$$\Phi_s(t) + \overline{\Phi_s(t)} + t \Phi'_s(t) + \overline{\Psi_s(t)} = 0, \quad (9)$$

$$t \in S_{mn}; \tau_1 \in \omega_{mn}; (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Здесь $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$; $\tau_1 = (\lambda - h^*)e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, h^* – толщина покрытия, t – аффикс точек берегов трещин, величины, относящиеся к покрытию, волокну и связующему, в дальнейшем отмечаются соответственно индексами t, b и s .

Краевые условия можно упростить. Можно показать [1], что приведенная система уравнений будет следующей

$$\left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_b}\right) \Phi_b(\tau_1) + \left(1 + \kappa_b \frac{\mu_t}{\mu_b}\right) \overline{\Phi_b(\tau_1)} - \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_b}\right) [\overline{\tau_1 \Phi'_b(\tau_1)} + \Psi_b(\tau_1)] e^{2i\theta} = (1 + \kappa_t) \overline{\Phi_b(\tau_1)}, \quad (10)$$

$$\left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) \Phi_t(\tau) + \left(1 + \kappa_t \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) \overline{\Phi_t(\tau)} - \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) [\overline{\tau \Phi'_t(\tau)} + \Psi_t(\tau)] e^{2i\theta} = (1 + \kappa_s) \overline{\Phi_s(\tau)}. \quad (11)$$

Таким образом, необходимо определить три пары аналитических функций $\Phi_t(z)$, $\Psi_t(z)$, $\Phi_b(z)$, $\Psi_b(z)$ и $\Phi_s(z)$, $\Psi_s(z)$ из краевых условий (5), (7), (9), (10), (11).

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (5), (7), (9) – (11) ищем в виде [6]:

$$\Phi_s(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad \Psi_s(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z), \quad (12)$$

$$\Phi_b(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_b(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k}, \quad (13)$$

$$\Phi_t(z) = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_t(z) = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{2k} z^{2k}, \quad (14)$$

$$\Phi_1(z) = i \tau_{xy}^{\infty} + i \alpha_0 + i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (15)$$

$$\Psi_1(z) = i \tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L g(t) \zeta(t-z) dt + A,$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L g(t) [\zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B, \quad (16)$$

где, интегралы (16) берутся по линии $L = \{[-l, -a] + [a, l]\}$, $\gamma(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$, $S(z) = \sum'_m \left[\frac{P_m}{(z-P)^2} - \frac{2z}{P_m} - \frac{1}{P_m}\right]$. Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$, A и B – постоянные, $g(t)$ – искомая функция, характеризующая сдвиг берегов зоны предразрушения.

$$g(x) = -\frac{2i\mu}{1+k_s} \frac{d}{dx} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0)] \text{ на } L \quad (17)$$

К соотношениям (12)–(16) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи

$$\int_{-l}^{-a} g(t) dt = 0, \int_a^l g(t) dt = 0 \quad (18)$$

Неизвестная функция $g(t)$ и постоянные a_{2k} , b_{2k} , g_{2k} , h_{2k} , α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевых условий (5) и (9).

Подставив в краевые условия (10), (11) вместо $\Phi_b(z)$, $\Psi_b(z)$, $\Phi_t(z)$, $\Psi_t(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ из разложения в ряды Лорана, а вместо $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ – ряд Фурье на $|\tau| = \lambda$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$g_{2k} \lambda_1^{2k} = \left[\frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} \right] \left\{ (2k+1)a_{2k} \lambda_1^{2k} + b_{2k-2} \lambda_1^{2k-2} \right\}, \quad g_{-2} \lambda_1^{-2k} = \left[\frac{\mu_b + \kappa_b \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} \right] a_{2k} \lambda_1^{2k}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} h_{-2k-2} \lambda_1^{2k-2} &= (2k+1)a_{2k} \lambda_1^{2k} + b_{2k-2} \lambda_1^{2k-2} + \left[\frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} \right] (2k+1)a_{2k} \lambda_1^{2k} - \\ &- \frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} (2k-1)2ka_{2k} \lambda_1^{2k} - \frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} (2k-1)b_{2k-2} \lambda_1^{2k+2}, \\ h_{-2k-2} \lambda_1^{-2k-2} &= a_{2k} \lambda_1^{2k} + \frac{\mu_b - \kappa_b \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} (2k+1)a_{2k} \lambda_1^{2k-2} - \frac{\mu_b - \mu_t}{\mu_b(\kappa_t + 1)} \left\{ (2k-1)a_{2k} \lambda_1^{2k} + b_{2k-2} \lambda_1^{2k+2} \right\}, \quad (k=1, 2, \dots), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_s(\kappa_t + 1)}{\mu_t} i g_0 &= -(\kappa_s + 1) \left[i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{0,j} - i \tau_{xy}^{\infty} + A_0 \right], \\ &- \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i (2k-1) g_{2k} \lambda^{2k} - \left(1 + \kappa_t \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i g_{-2k} \lambda^{-2k} - \\ &- \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i h_{-2k-2} \lambda^{2k-2} = (\kappa_s + 1) \left[i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2k+2} r_{j,k} + A_{2k} \right], \\ \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) (2k+1) i g_{-2k} \lambda^{-2k} &- \left(1 + \kappa_t \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i g_{2k} \lambda^{2k} - \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t} \right) i h_{-2k-2} \lambda^{-2k-2} = -(\kappa_s + 1) (i \alpha_{-2k} + A_{-2k}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(g_2 \lambda^2 - g_{-2} \lambda^{-2}) - i h_0 &= -i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+4} r_{1,j} - i \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{0,j} + \\ &+ i \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2) \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} s_{0,j} - i \tau_{xy}^{\infty} + A_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i(2k-1)g_{2k} \lambda^{2k} - i g_{-2k} \lambda^{-2k} - i h_{2k-2} \lambda^{2k} &= -i \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{k-2,j} + \\ &+ i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} r_{j,k} 2k \lambda^{2k} + i \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2) \alpha_{2j+2} \lambda^{2j+2} s_{k-1,j} + A_{2k}, \\ i(2k+1)g_{-2k} \lambda^{-2k} - i g_{2k} \lambda^{2k} - i h_{2k-2} \lambda^{-2k-2} &= i 2k \lambda^{2k} - i \beta_{2j+2} + A_{-2k}, \end{aligned}$$

где

$$S_{j,k} = \frac{(2j+2k+2)! P_{j+k+2}}{(2j)!(2k+2)! 2^{2j+2k+2}}; r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+2)! 2^{2j+2k+2}}; S_{0,0} = 0; r_{0,0} = 0.$$

$$g_{j+k+1} = \sum_{mn} \frac{1}{T^{2j+2k+2}}; T = \frac{1}{2} P_{mn};$$

$$A_{2k} = -\frac{1}{i\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t); \gamma(t) = ctg \frac{\pi}{\omega} t;$$

μ_t, μ_b и μ_s – упругие постоянные материала покрытия, волокна и связующего соответственно.

Требую, чтобы функции (12) удовлетворяли краевому условию на берегу разреза L , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) ctg \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = 0, \quad (21)$$

$$H(x) = x \overline{\Phi'_s(x)} + \overline{\Psi_s(x)}, \Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x),$$

Сингулярное уравнение (21) и алгебраические системы (19), (20) являются основными уравнениями задачи, позволяющими определить функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k}, β_{2k} . Зная функции $g(x), \Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, можно найти напряженное–деформированное состояние перфорированной пластины.

В частности, для коэффициента интенсивности напряжений iK_{II} у вершин трещины будем иметь формулу

$$iK_{II} = \pm \lim_{x \rightarrow c} \left[\sqrt{2\pi|x-c|} g(x) \right], \quad (22)$$

Материал включения, покрытия и связующего одинаков, т.е. $\mu_b = \mu_t = \mu_s, K_b = K_s = K_t$.

Из поставленного решения следует

$$\Phi_1(z) = i\tau_{xy}^\infty, \Psi_1(z) = i\tau_{xy}^\infty, \Phi_b(z) = 0, \Psi_b(z) = 0, \Phi_t(z) = 0, \Psi_t(z) = 0,$$

то получим решение для рядов трещин без отверстий. При $\omega \rightarrow \infty$ общие представления (12)–(16) дают решение задачи для одиночного включения, равномерно покрытого однородной пленкой, с трещинами вдоль осей координат для связующего. Для получения решения по одиночному отверстию с трещинами надо дополнительно принять $\mu_b / \mu_s = 0, \mu_t / \mu_s = 0$. причем верхний знак берется при $c = a$, а нижний знак при $c = l$.

Воспользовавшись разложениями функций $\gamma(z), \zeta(z), Q(z)$ в основном параллелограмме периодов, а также учитывая $g(x) = -g(-x)$ и применяя замену переменных, уравнение (18) к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P(\eta) d\eta}{\tau-\eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P(\tau) B(\eta, \tau) d\tau - \frac{1}{\omega_1} [\alpha_2 \lambda^2 (\delta_1 + \bar{\gamma}_1) + \beta_2 \lambda^2 \bar{\delta}_1] - \eta l \Phi_1(\eta) - \Psi_1(\eta) = 0, \quad (23)$$

$$P(\tau) = g(\tau); B(\eta, l) = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j) \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} U_0^j A_j;$$

$$A_j = \left[(2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1.2.3} \left(\frac{U}{U_0}\right) + \dots \left(\frac{U}{U_0}\right)^j \right];$$

$$U = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2; U_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2; \lambda_1 = \frac{\lambda}{l};$$

$$K_0^* = -\frac{\omega_1}{2} (\gamma_1 + \delta_1); K_j^* = (j+1)(P_{j+1} - g_{j+1}); K_0 = \omega_1 \delta_1; K_j = g_{j+1}; (j = 1, 2, \dots)$$

Сингулярное интегральное уравнение обычное регулируют по Карлеману–Векуа путем сведения его к уравнению Фредгольма. Однако при решении задач, представляющих интерес для приложений, по видимому, целесообразнее воспользоваться одним из способов прямого решения сингулярных уравнений [9]. Ниже применяется способ, развитый в [8].

Решение представим в виде

$$p(\tau) = \frac{p_0(\tau)}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{24}$$

Здесь $p_0(\tau)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем функция $p_0(\tau)$ заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным по чебышевским

$$L_n[P_0, \eta] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} P_k^0 \frac{\cos n\theta \cdot \sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k}; \eta = \cos \theta, \tag{25}$$

$$P_k^0 = P_0(\eta_k); \eta_m = \cos \theta_m; \theta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi; m = 1, 2, \dots, n.$$

Использование квадратурных формул позволяет заменить основные уравнения задачи бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений $P_k^0 = P_0(\eta_k)$ искомой функции в узловых точках, а также коэффициентов α_{2k}, β_{2k} .

К полученным уравнениям необходимо присоединить дополнительное условие, которое в дискретной форме имеет вид:

$$\sum_{v=1}^n \frac{P_0^v}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\lambda_1^2)(\tau_v+1)+\lambda_1^2}} = 0 \tag{26}$$

После нахождения значения P_0^v коэффициента интенсивности напряжений, iK_{II} определяется на основании соотношений (22), (24).

$$K_{II}^a = \sqrt{\frac{\pi l(1-\lambda_1^2)}{\lambda_1}} \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^n (-1)^{v+n} P_v^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_v}{2}; \tag{27}$$

$$K_{II}^l = \sqrt{\pi l(1-\lambda_1^2)} \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^n (-1)^{v+n} P_v^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_v}{2}.$$

Анализ решения. Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты на компьютере IBM по программе МАТЛАБ. Исследовались поперечный сдвиг треугольной решетки $\omega_1 = 2, \omega_1 = 2e^{\frac{1}{3}\pi i}$ и квадратной решетки $\omega_1 = 2, \omega_1 = 2i$ с постоянными условиями τ_{xy}^∞ . В численных расчетах полагалось $n = 10, n = 20$, что отвечает разбиению интервала на 10 и 20 чебышевских узлов соответственно (n – число в зависимости от расстояния между волокнами). Полученные системы решались методом Гаусса, с выбором главного элемента.

В механике хрупкого разрушения [6] особый интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений в окрестности концов трещины. Касательные напряжения τ_{xy} при $a > \lambda$ независимо от вида граничных условий на контурах круговых отверстий имеют в окрестности обоих концов разреза особенность порядка 1/2.

Трещины начнут расти, если выполняется условие $K_{II} = K_{IIc}$ (K_{IIc} – постоянная, характеризующая сопротивление материала распространению в нем трещин). Это условие (локальный критерий разрушения Ирвина) позволяет определить величину предельного (критического) значения внешних усилий.

При $a = \lambda$ поведение касательных напряжений зависит от вида граничных условий, задаваемых

вдоль обвода круговых отверстий. Здесь следует различать два основных случая:

1. Отверстие заполнено жестким ядром, т.е. трещина выходит на границу жесткого включения. В этом случае особенность в кончике ($x = a$) зависит [10] от коэффициента Пуассона материала ν и при $\nu = 0.3$ приблизительно равна 1/3.

2. Отверстие ничем не заполнено. В рассматриваемом случае трещина одним концом $x = a$ выходит на поверхность отверстия, свободного от внешних усилий. В этом случае напряжения в кончике $x = a$ ограничены и имеют особенность на другом конце.

После нахождения величины iK_{II} в окрестности обеих вершин трещины, используя критерий хрупкого разрушения Гриффитса–Ирвина, определяются предельные (критические) усилия, вызывающие развитие трещин у соответствующего кончика.

Меняя отношение жесткости волокна к жесткости связующего, можно получить все варианты, начиная со свободного от сил кругового отверстия и кончая абсолютно жестким включением.

На рисунке 2 для треугольной решетки представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки $\tau_* = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ в зависимости от длины трещины ($l_* = l - a$) для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6$ (кривые 1–5).

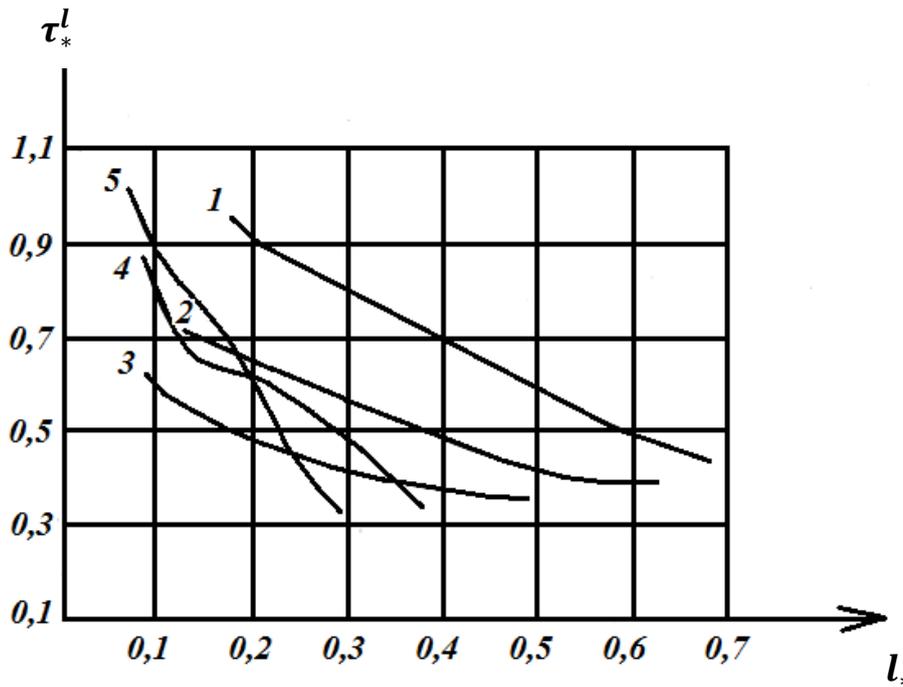


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки $\tau_*^l = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ от длины трещины $l_* = (l - a)$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6$ (кривые 1–5)

На рисунке 3 на основании полученных результатов приведены зависимости критической (предельной) нагрузки $\tau_*^a = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ от расстояния $a_* = a - \lambda$ для некоторых значений радиуса

отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6$ (кривые 1–5), жесткого включения без покрытия для треугольной решетки.

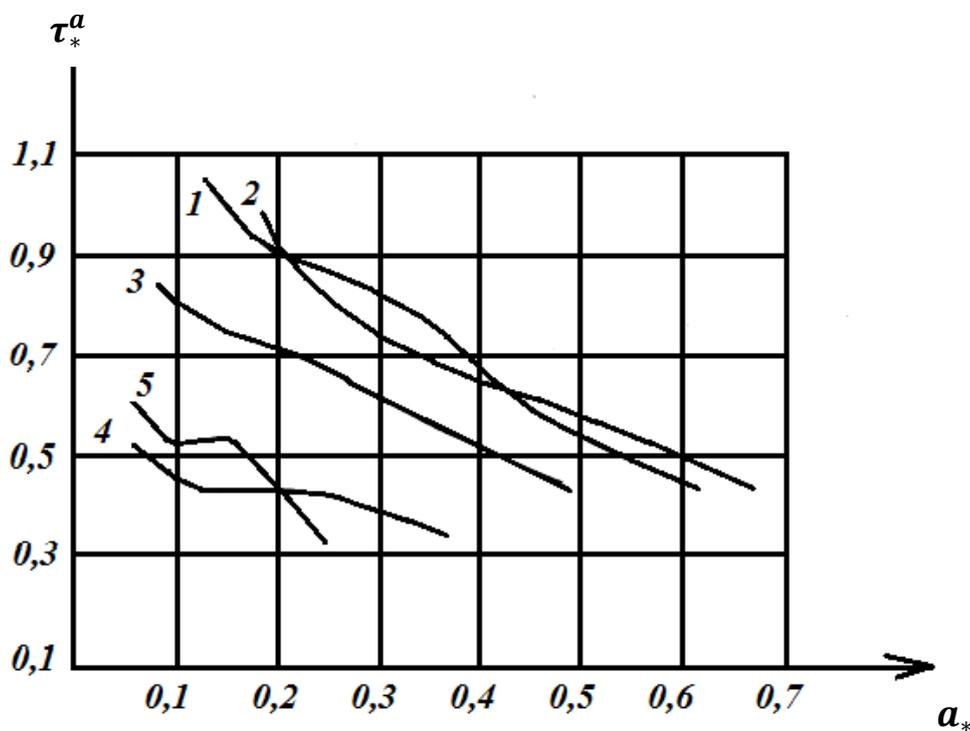


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки $\tau_*^a = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ от расстояния $a_* = a - \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6$ (кривые 1–5).

Как видно, при некоторых значениях радиуса отверстия λ возможно устойчивое развитие системы трещин (их взаимное упрочнение). Проведенный параметрический анализ задачи показал, что концентрация напряжений около включений в связующем оказывает существенное влияние на развитие очень малых трещин. С ростом длины трещин с концевыми зонами это влияние затухает, и уже при $l - \lambda > \lambda$ им можно пренебречь, однако при этом начинается сказываться взаимодействие трещин. В зависимости от геометрических и физических параметров задачи наблюдается устойчивое развитие трещин с концевыми зонами.

Зоны предразрушения находятся в связующем, поэтому взяты размеры отверстий. Величина λ связана с радиусом λ_1 инородного включения $\lambda = \lambda_1 + h^*$. Расчеты проводились для следующих значений $\frac{\mu_b}{\mu_s} = 25, \frac{\mu_b}{\mu_t} = 50$.

Наличие гибкого включения повышает коэффициент интенсивности напряжений, тогда как жесткие включения по сравнению с материалом связующего уменьшают его. Влияние включения особенно эффективно сказывается на близко расположенную вершину трещины.

Модель трещины с концевыми зонами позволяет исследовать закономерности распределения усилий в связях при различных законах деформирования, проводить анализ предельного равновесия трещин с учетом деформационного и силового критерия разрушения, а также прогнозировать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкости составного композита.

Вывод. Анализ решения численных расчетов был взят случай расположения отверстия в вершинах треугольной решетки. Полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Рассмотрен случай, когда трещины имеются только в связующие. В треугольной решетке представлены результаты

расчетов критической (предельной) нагрузки в зависимости от длины трещины $l_* = (l - a)$ для некоторых значений радиуса отверстия и от расстояния $a_* = a - \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия.

Литература

1. Ван Фо. Фы Г.А. Теория армированных материалов с покрытиями.–Киев, Наук. думка, 1971, 230с.
2. Zolgharnein E. Nucleation of a crack under inner compression of cylindrical bodies / E. Zolgharnein, V. M. Mirsalimov // Acta Polytechnica Hungarica.–2012.–Vol. 9, № 2.–P. 169–183.
3. Vaghari A. R. Nucleation of cracks in a perforated heart-releasing material with temperature-dependent elastic properties / A. R. Vaghari, V.M. Mirsalimov // J. Appl. Mech. Tech. Phys.–2012.–Vol. 53, № 7.–P. 589–598.
4. Гасанов Ф. Ф. Трещинообразование в перфорированном теле при про-дольном сдвиге /Ф.Ф. Гасанов //Механика машин, механизмов и материалов.–2013.–№ 2 (23).–С. 46–52.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили.–М.: Наука. 1966.–707 с.
6. Мирсалимов В. М. Неоднородные упруго-пластические задачи /В. М. Мирсалимов – М.: Наука. 1987.–256 с.
7. Ladopoulos E. G. Singular integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. – New York, Berlin: Springer Verlag. 2000. – 547 p.
8. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости.–М. Наука, 1973, 303 с.
9. Гольдштейн Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Вычисл. механика сплошных сред.–2009.–Т. 2, № 2.–С. 22–39.
10. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов.–М.: Наука, 1983, 296 с.

Potepalova A.J.

Assistant professor of the higher mathematics
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
MIREA - Russian Technological University
Moscow

Fedorenko S.E.

Student
MIREA - Russian Technological University
Moscow

OBSERVABILITY ANALYSIS IN THE PROBLEM OF DETERMINING THE ORIENTATION OF SATELLITE BY THE MEASUREMENTS

Потепалова А.Ю.,

Кандидат физ.-мат.наук, доцент
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МИРЭА - Российский технологический университет»
Москва

Федоренко С. Э.

Студент, бакалавр
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МИРЭА - Российский технологический университет»
Москва

АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ

Summary. This article concerns the problem of determining the orientation of gravitationally stabilized satellites based on the board measurements.

This question is regarded as a problem of state vector estimation in a time – varying linear dynamical system. Observability analysis of such systems has been conducted for the following cases:

- 1) Kinematic spacecraft movement equations are used with the horizon sensor readings;
- 2) Same equations are used with the constant direction sensor (magnetometer, solar sensor, astro sensor);
- 3) Dynamic spacecraft movement equations are used with the constant direction sensor.

Time – varying systems were reduced to a stationary form by a special transformation.

Аннотация. Работа посвящена проблеме уточнения ориентации гравитационно – стабилизированного спутника по измерениям, получаемым на борту.

Проблема рассматривается как задача оценивания вектора состояния динамической системы, нестационарной по измерениям.

Анализ наблюдаемости таких систем проведен для трех случаев:

- 1) используются кинематические уравнения движения спутника и показания датчика горизонта;
- 2) используются кинематические уравнения и показания датчика постоянного направления (солнечного датчика, магнитометра, звездного датчика);
- 3) используются динамические уравнения и показания датчика постоянного направления.

Нестационарные системы были сведены к стационарной форме путем преобразования координат.

Keywords: *dynamical system, observability analysis, kinematic equations, dynamic equations, time- varying systems, reducibility.*

Ключевые слова: *динамическая система; анализ наблюдаемости; кинематические уравнения, динамические уравнения движения спутника; нестационарная система; приводимость.*

Постановка проблемы.

Настоящая работа посвящена проблеме уточнения углового положения искусственного спутника Земли по измерениям, получаемым непосредственно на борту. Задача рассматривается как задача оценивания вектора состояния динамической системы. Вектор состояния может включать как искомые углы ориентации, угловые скорости, так и моделируемые погрешности измерителей. Построению алгоритма оценивания должен предшествовать анализ наблюдаемости системы.

Анализ исследований и публикаций

Динамическая система, соответствующая рассматриваемой задаче, оказывается нестационарной по измерениям. Данная работа посвящена приводимости таких систем. Этому вопросу посвящена монография Каленовой В.И. и Морозова В.М. «Линейные и нестационарные системы и их приложения к задачам механики»[2]. В монографии исследованы различные вопросы анализа и синтеза линейных нестационарных систем и изложены основы оригинальной теории приводимости линей-

ных нестационарных систем, содержащих управления и наблюдения. Особенности нестационарных динамических систем посвящена также работа [3].

В монографии [1] дается систематическое изложение теории движения спутника, подробно рассматривается теорема об устойчивости относительного равновесия, а также представлены кинематические уравнения малых пространственных колебаний спутника и динамические уравнения движения спутника около центра масс в поле сил.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

В данной статье рассматриваются два случая динамических систем, нестационарных по измерениям, наблюдаемость которых ранее не изучалась.

Цель статьи

Провести анализ наблюдаемости динамических систем, нестационарных по измерениям. По

его результатам можно будет судить, какие компоненты вектора состояния определяются по отдельности, а какие – только в комбинациях.

Изложение основного материала

Рассмотрим динамическую модель задачи.

1. Уравнения движения ИСЗ относительно центра масс.

При описании движения ИСЗ используются следующие системы координат:

- 1) $C\xi_1\xi_2\xi_3$ -инерциальная (неподвижная) система координат с началом в центре Земли, ось ξ_2 направлена на север;
- 2) $Ox_1x_2x_3$ -орбитальная система координат с началом в центре масс спутника:
 Ox_1 -касательная к орбите;
 Ox_2 -нормаль к плоскости орбиты;
 Ox_3 -радиус-вектор орбиты.
- 3) $Ox_1'x_2'x_3'$ -связанная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника.

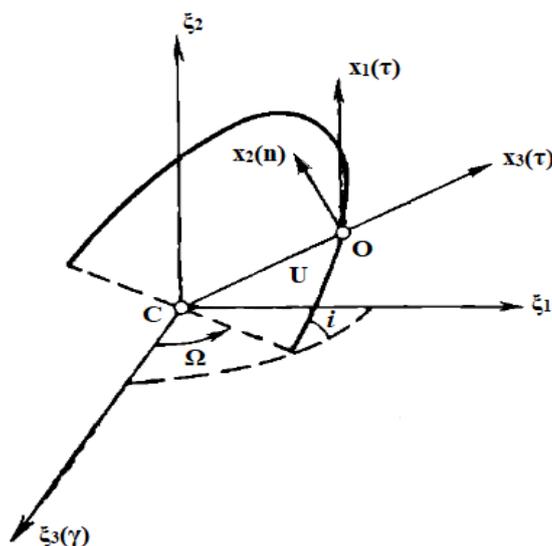


Рисунок 1

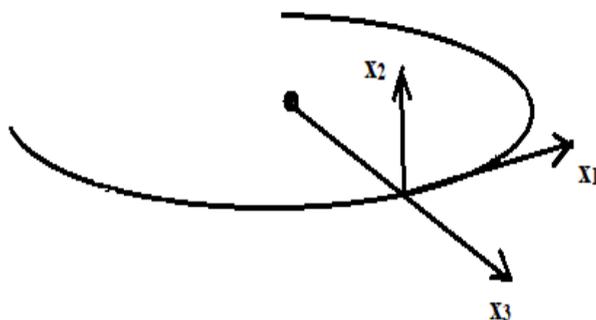


Рисунок 2

Положение орбитальной системы координат определяется углами $u = \omega_\pi + \nu, i, \Omega$, которые предполагаются известными на момент определения ориентации. Переход от трёхгранника $Ox_1x_2x_3$ к трёхграннику $Ox_1'x_2'x_3'$ осуществляется посредством трёх последовательных поворотов на углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

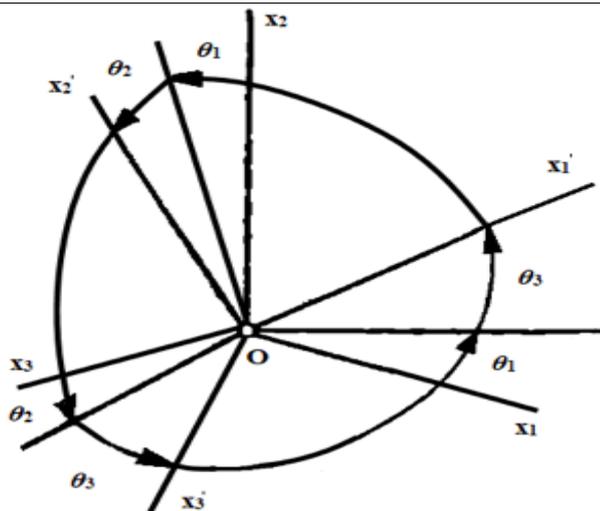


Рисунок 3

Если отклонение системы Ox' от системы Ox мало, то матрица ориентации имеет вид: $A_{xx'} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta_1 & \theta_3 \\ \theta_1 & 1 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & \theta_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A_{x'x} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_1 & -\theta_3 \\ -\theta_1 & 1 & \theta_2 \\ \theta_3 & -\theta_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

В случае, когда орбита спутника круговая, а возмущающие моменты равны нулю, существуют положения относительного равновесия спутника на орбите. Положение равновесия устойчиво, если для моментов инерции выполняется соотношение: $B > A > C$. При этом наибольшая ось эллипсоида инерции направлена по радиус-вектору орбиты Ox_3 , а наименьшая – по нормали к плоскости орбиты. [1]

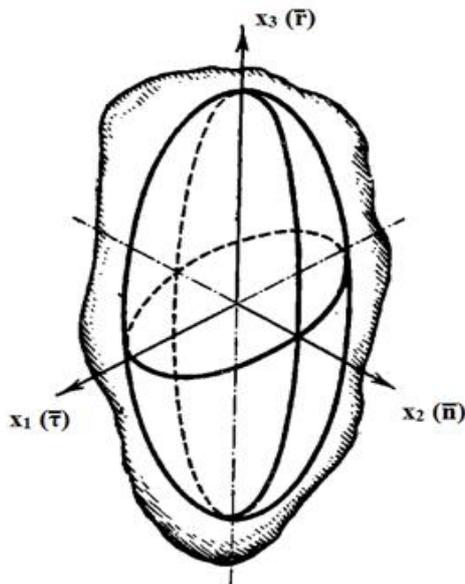


Рисунок 4

Далее предполагаем, что спутник движется в центральном ньютоновском поле сил по круговой орбите с угловой скоростью ω , и неравенство $B > A > C$ выполнено.

Кинематические уравнения малых пространственных колебаний спутника около устойчивого положения равновесия имеют вид: [1]

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega\theta_2 - \omega_3 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\omega\theta_1 + \omega_1 \\ \frac{d\theta_3}{dt} = \omega + \omega_2 \end{cases} \quad (2)$$

В безразмерном времени $\tau = \omega t$ кинематические уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 - \frac{\omega_3}{\omega} \\ \dot{\theta}_2 = -\theta_1 + \frac{\omega_1}{\omega} \\ \dot{\theta}_3 = -1 + \frac{\omega_2}{\omega} \end{cases} \quad (2')$$

Динамические уравнения малых колебаний спутника около устойчивого положения равновесия $\theta_i = 0, \dot{\theta}_i = 0$ в отсутствие возмущающих моментов имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\frac{B-A}{C}\theta_1 + \frac{C-B+A}{C}\dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 = -4\frac{B-C}{A}\theta_2 + \frac{C-B+A}{A}\dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_3 = -3\frac{A-C}{B}\theta_3 \end{cases} \quad (3)$$

2. Датчики ориентации и уравнения измерений.

1) Гироскопические датчики угловой скорости (ДУС).

Эти датчики измеряют проекции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости ИСЗ на связанные с ним оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 . В соответствии со специальной литературой предлагается следующая модель погрешностей датчиков угловой скорости:

$$\omega_i^{ДУС} = v_{i0} + v_{iN}.$$

Здесь $v_{i0}, i=1,2,3$ - постоянные уходы датчиков, v_{iN} - случайные составляющие типа белого шума, которые учитываются в алгоритмах оценивания. Обозначим $\omega_i^n = U_i/\omega$ - приведенные показания датчика угловой скорости.

Далее будем использовать систему кинематических уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 + v_{30} + \omega_3^n & v_{10} = 0 \\ \dot{\theta}_2 = -\theta_1 + v_{10} + \omega_1^n & v_{20} = 0 \\ \dot{\theta}_3 = -1 + v_{20} + \omega_2^n & v_{30} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2) Инфракрасные датчики горизонта.

Эти датчики показывают отклонение оси спутника Ox_3 от местной вертикали. Уравнения измерений датчика горизонта имеют вид:

$$\begin{cases} z_1 = \theta_2 + r_{10} + r_1 \\ z_1 = \theta_3 + r_{20} + r_2 \end{cases}, r_{10} = 0, r_{20} = 0 \quad (5)$$

Случайные составляющие погрешностей r_1, r_2 не учитываются при анализе наблюдаемости.

3) Датчики направления: магнитометр, солнечный датчик, звездный датчик.

Измеряются компоненты некоторого постоянного вектора \vec{l} в связанной системе координат. Это может быть вектор напряженности магнитного поля Земли, вектор направления на Солнце, вектор направления на неподвижную звезду.

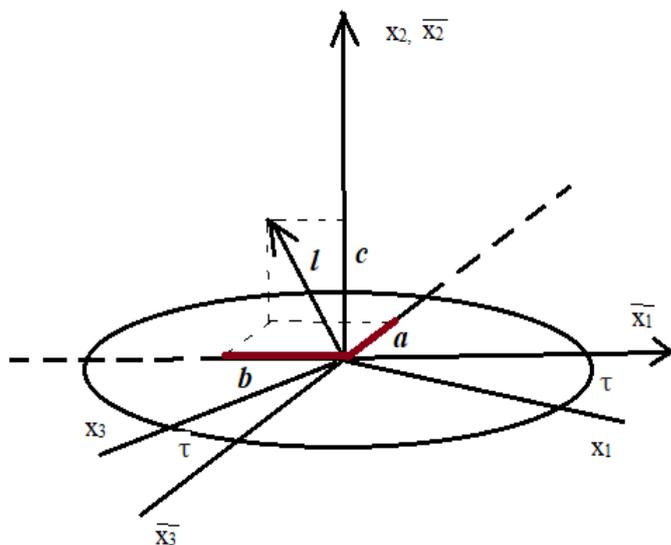


Рисунок 5

Обозначим $\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z$ -компоненты вектора l в соответствующей системе координат. Взаимное расположение систем координат определяется матрицами A_{xx} и $B_{\xi x}$. Элементы матрицы $B_{\xi x}$ зависят от

параметров u, i, Ω . Здесь Ω - долгота восходящего узла орбиты от точки Весны, i -наклонение плоскости орбиты к экватору, угол u характеризует расположение спутника на орбите.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{11} &= \sin U \sin \Omega + \cos U \cos \Omega \cos i & \mathbf{b}_{21} &= \cos U \sin i \\
 \mathbf{b}_{12} &= -\cos \Omega \sin i & \mathbf{b}_{22} &= \cos i \\
 \mathbf{b}_{13} &= \cos U \sin \Omega - \sin U \cos \Omega \cos i & \mathbf{b}_{23} &= -\sin U \sin i \\
 \mathbf{b}_{31} &= \sin U \cos \Omega - \cos U \sin \Omega \cos i & & \\
 \mathbf{b}_{32} &= \sin \Omega \sin i & & \\
 \mathbf{b}_{33} &= \cos U \cos \Omega + \sin U \sin \Omega \cos i & &
 \end{aligned} \tag{6}$$

Матрица ориентации связанной системы координат относительно орбитальной имеет вид (1):

$$A_{x'x} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_1 & -\theta_3 \\ -\theta_1 & 1 & \theta_2 \\ \theta_3 & -\theta_2 & 1 \end{pmatrix}, l_x = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

Уравнения измерений можно построить следующим образом:

$$z = l_x - l_x = A_{x'x} l_x - l_x = (A_{x'x} - E) l_x$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & -\theta_3 \\ -\theta_1 & 0 & \theta_2 \\ \theta_3 & -\theta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \theta_1 - l_3 \theta_3 \\ -l_1 \theta_1 + l_3 \theta_2 \\ l_1 \theta_3 - l_2 \theta_2 \end{pmatrix}$$

Окончательная запись уравнений измерений:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Заметим, что ранг матрицы здесь равен двум, то есть измерения зависимы.

Компоненты вектора измерений $l = (l_1, l_2, l_3)$ в орбитальной системе координат имеют вид: $l_x = B_{x\xi} l_\xi$, где компоненты матрицы $B_{x\xi}$ представлены формулами (6) и $B_{x\xi} = B_{\xi x}^T$.

Предполагаем, что центр масс спутника движется по круговой орбите, имеющей наклонение I и долготу восходящего узла Ω . Тогда $u = \omega t = \tau$. Таким образом, компоненты вектора измерений $l = (l_1, l_2, l_3)$ в орбитальной системе координат можно представить в виде [3]:

$$l_1 = a \sin \tau - b \cos \tau, l_2 = c, l_3 = b \sin \tau + a \cos \tau \tag{8}$$

Постоянные a, b, c зависят от расположения визируемого направления в неподвижной системе координат. Подставляя выражения (8) в уравнения (7), получим общий вид уравнений измерений датчика постоянного направления:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= c \theta_1 + (a \cos \tau - b \sin \tau) \theta_3 \\
 z_2 &= (b \cos \tau + a \sin \tau) \theta_1 + (b \sin \tau - a \cos \tau) \theta_2 \\
 z_3 &= -c \theta_2 + (-b \cos \tau - a \sin \tau) \theta_3 \tag{9}
 \end{aligned}$$

3. Анализ наблюдаемости.

Случай 1. Кинематические уравнения и измерения датчика горизонта.

Был проведен анализ наблюдаемости системы (4),(5). Эта система полностью стационарна. Получены наблюдаемые комбинации:

$$y_1 = \theta_2 + r_{10}, y_2 = -\theta_1 + v_{10}, y_3 = \theta_2 + v_{30}, y_4 = \theta_3 + r_{20}, y_5 = -1 + v_{20}$$

Новые переменные y_1, \dots, y_5 образуют замкнутые системы уравнений с соответствующими измерениями:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ z_1 = y_1 \end{cases} \begin{cases} \dot{y}_4 = y_5 \\ \dot{y}_5 = 0 \\ z_2 = y_4 \end{cases}$$

Вывод: при данном составе измерений не удастся отделить систематические составляющие погрешностей датчика горизонта. Искомые углы ориентации спутника наблюдаются лишь в комбинациях:

$$\theta_2 + r_{10}, -\theta_1 + v_{10}, \theta_2 + v_{30}, \theta_3 + r_{20}.$$

Случай 2. Кинематические уравнения и датчик постоянного направления.

Был проведен анализ наблюдаемости системы (4) с измерениями вида (9). Предполагалось, что датчик имеет постоянные погрешности r_{10}, r_{20} .

Система нестационарна по измерениям. Для анализа наблюдаемости была использована методика приведения к стационарной форме путем расширения пространства состояний [2]. Введено 18 переменных: $Y = (y_1, \dots, y_{18})^T$

$$y_1 = \theta_1, y_2 = \theta_2, y_3 = v_{30}, y_4 = v_{10}, y_5 = e^{i\tau} \theta_3 \text{ и т.д.}$$

В новых переменных система полностью стационарна: $\dot{Y} = BY, Z = HY$.

Переходя от наблюдаемых комбинаций переменных y_k к исходным переменным, получаем, что в случае $a^2 + b^2 \neq 0, c \neq 0$ все углы ориентации спутника и погрешности измерителей определяются:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, v_{10}, v_{20}, v_{30}, r_{10}, r_{20}.$$

Геометрический смысл условий $a^2 + b^2 \neq 0, c \neq 0$ состоит в том, что визируемое направление не должно быть ортогонально плоскости орбиты и не должно лежать в ней.

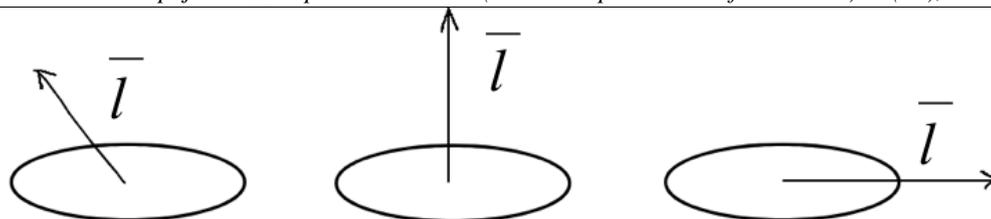


Рисунок 6

Случай 3. Динамические уравнения с постоянным возмущающим моментом и датчик постоянного направления.

Проведен анализ наблюдаемости системы динамических уравнений (3) и уравнений измерений (9). Компоненты неизвестного возмущающего момента, действующего на спутник, предполагались постоянными и обозначались M_{10}, M_{20}, M_{30} .

Система нестационарна по измерениям. Для анализа наблюдаемости использовалась та же методика, что и в случае 2. Были введены переменные:

$y_1 = e^{it}\theta_1$ и т.д. Новый вектор состояния включает 30 компонент, среди которых есть комплексно сопряженные. В новых переменных измерения приобретают вид:

$$z_1 = H_1 Y_1 + \overline{H_1 Y_1}, z_2 = H_2 Y_2 + \overline{H_2 Y_2} \quad (10)$$

При анализе наблюдаемости используем тот факт, что в силу (10) из наблюдаемости переменной u_k следует наблюдаемость сопряженной переменной $\overline{u_k}$.

Возвращаясь от переменных u_k к исходным переменным, обнаруживаем, что при данном составе измерений определяются все параметры состояния системы, в том числе неизвестные возмущающие моменты: $\theta_1, \psi_1, \theta_2, \psi_2, \theta_3, \psi_3, M_{10}, M_{20}, M_{30}$.

Выводы и предложения.

В статье проведен анализ наблюдаемости динамических систем для случаев:

- 1) Используются кинематические уравнения движения ИСЗ и показания датчика горизонта;
- 2) Используются кинематические уравнения движения ИСЗ и показания одного из датчиков: магнитометр, солнечный датчик, астродатчик;
- 3) Используются динамические уравнения и показания датчика постоянного направления.

Установлено, что в случае 1) углы ориентации спутника определяются в комбинациях с погрешностями измерений. В случаях 2) и 3) все компоненты вектора определяются в отдельности.

Проведенный анализ наблюдаемости позволяет приступить к построению алгоритма оценивания искомых углов ориентации, что является предметом отдельного исследования.

Список литературы.

- 1.Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс. – Москва, Наука, 1965 – 416с.
- 2.Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. Москва, «Курс», Инфра – М, 2016 – 208с.
- 3.Морозов В.М., Каленова В.И., Григорян А.Ю. О наблюдаемости в задаче определения ориентации спутника // Коррекция в навигационных системах и системах ориентации искусственных спутников Земли. – М., Изд-во МГУ, 1986 – с.31-39.

Садыгов Мисрадин Аллахверди оглы
 доктор физико-математических наук, профессор
 Бакинский Государственный Университет

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu
 Doctor of Physikal and Mathematical Sciences, Professor
 Baku State University

NECESSARY CONDITION OF AN EXTREMUM OF THE FIRST AND SECOND ORDER IN A LOCALLY CONVEX SPACE

Аннотация: В работе установлены необходимые условия экстремума первого и второго порядков для негладких экстремальных задач при наличии ограничений в локально выпуклом пространстве. В линейном пространстве определены $S - (\beta, \delta)$ и $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевые отображения в точке и используя класс $S - (o(\beta), \delta)$ и $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ локально липшицевые отображения в точке, получены необходимые условия экстремума при наличии ограничений.

Abstract: The necessary first and second-order extremum conditions are obtained for nonsmooth extremal problems with constraints in a locally convex space. In a linear space $S - (\beta, \delta)$ and $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ locally

Lipschitz mappings at a point are defined and using the classes $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \alpha(\beta))$ and $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \alpha(\beta))$ locally Lipschitz mappings at a point, necessary conditions of the extremum are received for extreme problems in the presence of restrictions.

Ключевые слова: сублинейная функция, липшицевая функция, отображение, локальный минимум.
Key words: sublinear function, Lipschitz function, map, local minimum.

1. Вспомогательные результаты

Пусть X и Y векторные пространства, $|x|_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $|y|_2 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородные неотрицательные функции (например, нормы или полунормы в X и Y соответственно).

Пусть $C \subset X$, $F: X \rightarrow Y$, $S: X \rightarrow Y$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \geq \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Положим $B = \{z \in X : |z|_1 \leq 1\}$.

Отображение F назовем $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \alpha(\beta))$ локально липшицевым относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$ с постоянной K в точке $\bar{x} \in X$, если F удовлетворяет условию

$$|F(\bar{x} + x + z) - F(\bar{x} + x) - S(x + z) + S(x)|_2 \leq K|z|_1^\nu (|x|_1^{\beta - \alpha\nu} + |z|_1^{\frac{\beta - \alpha\nu}{\alpha}}) + o(|x|_1^\beta)$$

при $x, z \in X$, $|x|_1 \leq \delta$, $|z|_1 \leq \delta$ [1],[2]. Если $o(t) \equiv 0$, то отображение F назовем $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевым относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$ с постоянной K в точке \bar{x} . Если $o(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$.

Далее считаем, что $S(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$ (если $S(0) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\tilde{S}(x) = S(x) - S(0)$) и если $F(x) = f(x)$, то считаем, что $S(x) = \varphi(x)$. Если существует функция $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$$|F(\bar{x} + x) - F(\bar{x}) - S(x)|_2 \leq o(|x|_1^\beta)$$

при $x \in X$, $|x|_1 \leq \delta$, т.е. $x \in \delta B$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S-(\alpha(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке \bar{x} относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$. Если существует функция $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$$f(\bar{x} + x) - f(\bar{x}) - \varphi(x) \leq o(|x|_1^\beta)$$

при $x \in X$, $|x|_1 \leq \delta$, то функцию f назовем $\varphi-(\alpha(\beta), \delta)$ локально верхней полу-липшицевой в точке \bar{x} относительно $|x|_1$.

Рассмотрим важный случай введенных определений. Будем считать, что $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, где $S_j: X \rightarrow Y$ положительно однородный степени j оператор, а $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$, где $\varphi_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородная степени j функция, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Касательным конусом к C в точке x_0 называется множество (см.[3]), состоящее из всех векторов $v \in X$ таких, что для каждой окрестности V вектора v в X найдется окрестность U точки x_0 в X и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(x + tV) \cap C \neq \emptyset$ при $x \in U \cap C$ и $t \in (0, \varepsilon)$. Касательный конус к множеству C в точке $x_0 \in C$

обозначается через $T_C(x_0)$. Отметим, что $T_C(x_0) = \liminf_{x \rightarrow_C x_0, t \downarrow 0} \frac{1}{t}(C - x)$, где $x \rightarrow_C x_0$

$\Leftrightarrow x \rightarrow x_0$ и $x \in C$. Положим $N_C(x_0) = T_C(x_0)^- = \{p \in X^* : \langle p, x \rangle \leq 0 \text{ при } x \in T_C(x_0)\}$. Если

$C \subset X$ выпуклое множество, то $T_C(x_0) = \text{cl} \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$ (см.[4]).

Пусть $C \subset X$, $x_0 \in C$. Вектор $v \in X$ называется гиперкасательной к множеству C в точке $x_0 \in C$, если найдутся окрестность U точки x_0 , окрестность V вектора v и число $\varepsilon > 0$ такие, что $U \cap C + (0, \varepsilon)V \subset C$. Множество всех гиперкасательных к множеству C в точке $x_0 \in C$ обозначается через $I_C(x_0)$ ([3, с.267]).

Пусть X - банахово пространство. Если $C \subset X$ выпуклое множество, $\text{int } C \neq \emptyset$ и $x_0 \in C$, то из предложения 4.1.6[4] имеем, что $\text{int } T_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{\text{int } C - x_0}{\lambda}$. Кроме того из леммы ([5], с.95) следует, что

$I_C(x_0)$ непусто. Тогда из теоремы 2.4.8[5, с.59] следует, что $\text{int } T_C(x_0) = I_C(x_0)$. Если $C \subset X$ выпук-
 лое множество и $x_0 \in C$, то положим $T_C(x_0) = \text{cl} S_C(x_0)$, где $S_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$ (см.[4, с.167]). Обо-

значим $\tilde{C} = \text{int } C \cup \{x_0\}$, $S_{\tilde{C}}(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{\tilde{C} - x_0}{\lambda}$.

Отметим, что если X нормированное пространство, $\text{int } C \neq \emptyset$ и C выпуклое множество, то по предложению 4.1.7[4, с.170] имеем $T_C(x_0) = \text{cl} S_C(x_0)$. Если X отделимое локально выпуклое пространство, $\text{int } C \neq \emptyset$ и C выпуклое множество, то из теоремы 5.2.1([6], с.447) следует, что $T_C(x_0) = \text{cl} S_{\tilde{C}}(x_0)$.

Пусть $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Вектор x называется возможным направлением множества C в точке x_0 , если найдутся окрестность U точки x_0 и число $\alpha_0 > 0$ такие, что $z + \alpha x \in C$ для любого $z \in C \cap U$ и $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Совокупность всех возможных направлений в точке x_0 множества C обозначим через $H(x_0; C)$ [3].

Пусть $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Вектор x называется допустимым направлением множества C в точке x_0 , если найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что $x_0 + \alpha x \in C$ для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Совокупность всех допустимых направлений в точке x_0 множества C обозначим через $\gamma(x_0; C)$.

Теорема 1.1[7]. Если X и Y пространства Фреше, $C \subset X$ выпуклое множество и $\text{int } C \neq \emptyset$, $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, выпуклые непрерывные функции, $\Lambda : X \rightarrow Y$ непрерывный линейный оператор, $Ax = \Lambda x + \bar{y}$, $\bar{y} \in Y$, $\text{Im } \Lambda = Y$ и система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, $Ax = 0$ не имеет решения в C , то существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ и вектор $y^* \in Y^*$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0$ при $x \in C$.

Теорема 1.2[7]. Пусть X линейного пространства, $C \subset X$ выпуклое множество, $C \neq \emptyset$, $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, выпуклые функции и система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, не имеет решения в C . Тогда существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \geq 0$ при всех $x \in C$. Положим $g(y, a) = \inf_{x \in T, Ax+y=0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$.

Лемма 1.1[8]. Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $e(x, a) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$, где $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in \{0, 1, \dots, m\}$

, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный сюръективный оператор, T выпуклый замкнутый конус, $\text{int } T \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$ и $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \text{int } T \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$. Тогда $(y^*, b) \in \partial g(0, 0)$ в том и

только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что $-\Lambda^* y^* \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i(0) + N$ и

$$b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Из леммы 1.1 следует, что

$$\partial g(0, 0) = \{(y^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i(0), x^* \in N,$$

$$y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

Лемма 1.2[7]. Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный оператор, $\text{Im } \Lambda = Y$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, T выпуклый замкнутый конус, $\text{int } T \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$. Тогда задача $\inf_{x \in T, \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$ имеет решение в том и только в том случае, когда существуют элементы $z_1^* \in \text{dom } \varphi^*$, $z_2^* \in (\text{Ker } \Lambda)^\perp$ и $z_3^* \in N = T^-$ такие, что $z_1^* + z_2^* + z_3^* = 0$ и $\partial h_1^*(z_1^*) \cap \Lambda^{-1}(-y) \cap \partial \delta_N(z_3^*) \neq \emptyset$, где $\varphi(x) = \max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x)$, $h_1(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$.

2. Необходимое условие в терминах верхней аппроксимации

Пусть X отделимое локально выпуклое пространство, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $C \subset X$, $|x|$ -положительно однородная неотрицательная функция.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, z \in P = \{x \in X : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in C\}. \quad (2.1)$$

Точка $x_0 \in P$ называется точкой локального минимума f_0 на P , если существует окрестность U точки x_0 такое, что $f_0(x_0) \leq f_0(x)$ при $x \in P \cap U$.

Теорема 2.1. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, $C \subset X$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$.

Доказательство. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0$, $\varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $H_C(x_0)$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in H_C(x_0)$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x}) \leq o(|t\bar{x}|)$ при $t \in \mathbb{R}$, $|t\bar{x}| \leq \delta$, $i \in I$.

Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i(\bar{x}) + o(t|\bar{x}|)$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0$, $j \in J$ при $t \in (0, \lambda_2]$. По условию $\bar{x} \in H_C(x_0)$. Тогда существует $v_0 > 0$ такое, что $x_0 + t\bar{x} \in C$ при $t \in [0, v_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $H_C(x_0)$. По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I, \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I, f_j(x_0) = 0$ при $j \in J, C \subset X$ и $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Доказательство. По теореме 2.1 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$. Из следствия 5.2[3, с.268] следует, что $sH_C(x_0) = T_C(x_0)$. Так как $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции при $i \in I$, то $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$. Следствие доказано. Аналогично теореме 2.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I, \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I, f_j(x_0) = 0$ при $j \in J, C$ выпуклое множество, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Доказательство. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $S_C(x_0)$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in S_C(x_0)$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x}) \leq o(|t\bar{x}|)$ при $t \in \mathbb{R}, |t\bar{x}| \leq \delta, i \in I$. Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i(\bar{x}) + o(t|\bar{x}|)$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0, \lambda_1$ положительное число при $|\bar{x}| = 0$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0, f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0, j \in J$ при $t \in (0, \lambda_2]$. Если $\bar{x} \in S_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\bar{x} \in \frac{C - x_0}{\lambda_0}$, т. е. $x_0 + \lambda_0 \bar{x} \in C$. По предложению 4.1.2 [4, с.169] $S_C(x_0)$

выпуклое множество. Поэтому $x_0 + t\bar{x} = (1 - \frac{t}{\lambda_0})x_0 + \frac{t}{\lambda_0}(x_0 + \lambda_0 \bar{x}) \in C$ при $t \in [0, \lambda_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $S_C(x_0)$. По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in S_C(x_0)$

Так как $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции при $i \in I$, то $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \text{cl}S_C(x_0) = T_C(x_0)$.

Теорема доказана.

Из следствия 2.1 и теоремы 2.2 получим, что точка нуль минимизирует выпуклую функцию $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \delta_{T_C(x_0)}(x)$ в X . Так как $\partial \delta_{T_C(x_0)}(0) = N_C(x_0)$, то имеем $0 \in \partial(\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \delta_{T_C(x_0)}(x))_{x=0} = \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i(0) + N_C(x_0)$.

Замечание 2.1. Из доказательства следствия 2.1 и теоремы 2.2 имеем, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in I_C(x_0)$ и $x \in S_C(x_0)$ соответственно. Поэтому $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Пусть X и Y - отделимые локально выпуклые пространства, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор, $C \subset X$, $\bar{y} \in Y$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, z \in \{x \in X : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \Lambda x + \bar{y} = 0, x \in C\}. \quad (2.2)$$

Теорема 2.3. Если X и Y отделимые локально выпуклые пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.2), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, $i \in I$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор, $C \subset X$, то $\max_{i \in I} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$.

Доказательство. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0$, $\varphi_1(x) < 0$, \dots , $\varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $x \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x}) \leq o(|t\bar{x}|)$ при $t \in \mathbb{R}$, $|t\bar{x}| \leq \delta$, $i \in I$. Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i(\bar{x}) + o(t|\bar{x}|)$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$.

Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0$, $j \in J$ при $t \in (0, \lambda_2]$.

Поэтому $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0$, $j \in J$, $\Lambda(x_0 + t\bar{x}) + \bar{y} = 0$ при $t \in (0, \lambda_2]$. По условию $\bar{x} \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$. Тогда существует $v_0 > 0$, где $\lambda_2 \geq v_0$, такое, что $x_0 + t\bar{x} \in C$ при $t \in [0, v_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.2), то получим противоречие, т.е. система $\varphi_0(x) < 0$, $\varphi_1(x) < 0$, \dots , $\varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $\gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$. Поэтому $\max_{i \in I} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Если X и Y пространства Фреше, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.2), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный оператор, $\text{Im} \Lambda = Y$, $C \subset X$ и $\text{int } H_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, \Lambda x \rangle \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$.

Доказательство. Так как $H_C(x_0) \subset \gamma_C(x_0)$, то из доказательства теоремы 2.3 следует, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0, \Lambda x = 0$ не имеет решения на $x \in H_C(x_0)$. Тогда по теореме 1.1 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, \Lambda x \rangle \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$.

Теорема доказана.

Пусть X и Y - счетно-банаховы пространства топологии, которых задаются семейством направленных норм $\{x \rightarrow \|x\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{y \rightarrow \|y\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ соответственно, $\|x\|_k \in \{\|\cdot\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \|y\|_s \in \{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Через X_k обозначим пространство X с нормой $\|x\|_k$, а через Y_s обозначим пространство Y с нормой $\|y\|_s$.

Пусть $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i \in I = \{0, 1, \dots, m\}, F : X \rightarrow Y, C \subset X$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, z \in \{x \in X : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, F(x) = 0, x \in C\}. \quad (2.3)$$

Если x_0 -точка локального минимума в задаче (2.3), то существует X_k такое, что x_0 -является точкой локального минимума в задаче (2.3) относительно X_k . Также считаем, что пространство Y_s такое, что оператор $F : X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$. Положим $|x|_1 = \|x\|_k, |y|_2 = \|y\|_s$. Для простоты $\|x\|_k$ обозначим через $\|x\|$, а $\|y\|_s$ через $\|y\|$.

Пусть $I_C(x_0)$ ($T_C(x_0)$) множество всех гиперкасательных (касательных) к множеству C в точке $x_0 \in C$ относительно X_k и $N_C(x_0) = T_C^-(x_0)$ в X_k .

Теорема 2.5. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.3) относительно X_k , в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 , где $i \in I$, $\varphi_i : X_k \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, оператор $F : X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y, C \subset X, I_C(x_0) \neq \emptyset$ относительно X_k , то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Доказательство. Обозначим $\Lambda = F'(x_0)$. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0, \Lambda x = 0$ не имеет решения на $I_C(x_0)$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in I_C(x_0)$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$ и $\Lambda \bar{x} = 0$. Так как $\Lambda \bar{x} = F'(x_0)\bar{x} = 0$ и $F'(x_0)X = Y$, то по теореме Люстерника[9,с.33] существует $\varepsilon > 0$ и отображение $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow X$ такие, что $\frac{\gamma(t)}{t} \rightarrow 0$ при

$t \downarrow 0$ и $F(x_0 + t\bar{x} + r(t)) = 0$ при $t \in [0, \varepsilon]$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулип-шицеву условию в точке x_0 , где $i \in I$. Тогда имеем $f_i(x_0 + t\bar{x} + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x} + r(t)) \leq o(\|t\bar{x} + r(t)\|)$ при $t \in [0, \varepsilon]$, $\|t\bar{x} + r(t)\| \leq \delta$, $i \in I$. Так как φ_i непрерывная функция, то существует $0 < \delta_0 \leq \frac{1}{2}\delta$ такое, что $\left| \varphi_i\left(\bar{x} + \frac{r(t)}{t}\right) - \varphi_i(\bar{x}) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \varphi_i(\bar{x}) \right|$ при $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\| \leq \delta_0$ и $i \in I$. Тогда получим, что $\varphi_i\left(\bar{x} + \frac{r(t)}{t}\right) \leq \frac{1}{2} \varphi_i(\bar{x})$ при $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\| \leq \delta_0$ и $i \in I$. Так как $\frac{r(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$, то существует λ , где $0 < \lambda < 1$, такое, что $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\| \leq \delta_0$ при $t \in (0, \lambda]$. Тогда $\|t\bar{x} + r(t)\| \leq \delta$ при $t \in [0, \lambda_1]$, где $\lambda_1 = \min\left\{\lambda, \frac{1}{2\|\bar{x}\|} \delta, \varepsilon\right\}$. Поэтому имеем, что

$f_i(x_0 + t\bar{x} + r(t)) - f_i(x_0) \leq 0,5 t\varphi_i(\bar{x}) + o(t\|\bar{x} + \frac{1}{t}r(t)\|) \leq 0,5 t\varphi_i(\bar{x}) + o(t(\|\bar{x}\| + \delta_0))$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x} + r(t)) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x} + r(t)) < 0$, $j \in J$, $F(x_0 + t\bar{x} + r(t)) = 0$ при $t \in (0, \lambda_2]$. Если $\bar{x} \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + t\bar{x} + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.3), то получим проти-воречие. Поэтому система $\varphi_0(x) < 0$, $\varphi_1(x) < 0$, ..., $\varphi_m(x) < 0$, $\Lambda x = 0$ не имеет решения на $I_C(x_0)$. По теореме 1.1 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in I_C(x_0)$. Так как $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции при $i \in I$ и $\Lambda = F'(x_0)$ линейный непрерывный оператор, то по теореме 2.4.8[5, с.59] имеем, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in \text{cl} I_C(x_0) = T_C(x_0)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.2. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.3) относительно X_k , в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулип-шицеву условию в точке x_0 , где $i \in I$, $\varphi_i : X_k \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, оператор $F : X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, C выпуклое множество, $\text{int} C \neq \emptyset$ относительно X_k , то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$. Справедливость следствия 2.2 следует из теоремы 2.5.

Из теоремы 2.5 и следствия 2.2 имеем, что точка нуль минимизирует выпуклую функцию $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x)$ в X . Поэтому получим

$$0 \in \partial \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x) \right)_{x=0} = \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i(0) + F'(x_0)^* y^* + N_C(x_0).$$

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.5 имеем, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in I_C(x_0) \cap \text{Ker} F'(x_0)$. Поэтому если $\text{int} T_C(x_0) \cap \text{Ker} F'(x_0) \neq \emptyset$, то отсюда следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker} F'(x_0)$.

3. Необходимое условие второго порядка

Пусть X отделимое локально выпуклое пространство, $C \subset X$, $x_0 \in C$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad x \in C \quad (3.1) \text{ где } f_j : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad j \in I = \{0,1,\dots,m\}, \quad C \subset X$$

Положим $H = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0,1,\dots,m, x \in I_C(x_0)\}$, $g_a(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0)}(x)$, где $a = (a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема 3.1. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I = \{0,1,\dots,m\}$, функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхнему полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1,2,1,\delta,o(2))$ (или $(1,\mu,1,\delta)$, где $\mu > 1$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$ при $i \in I$, $\partial g_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, $C \subset X$ и $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0) \right\} \geq 0 \quad \text{при } h \in H \cup \{0\}.$$

Доказательство. Пусть $t \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет $(1,2,1,\delta,o(2))$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$, то $|\varphi_i^2(t_1 x_1 + t_2 x_2) - \varphi_i^2(t_1 x_1)| \leq K t_2 |x_2| (t_2 |x_2| + t_1 |x_1|) + o(t_1^2 |x_1|^2)$ при $x_1, x_2 \in X, t_1 |x_1| \leq \delta, t_2 |x_2| \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq K t^2 |x|^2$ при $t|x| \leq \delta, i \in I$. По условию получим, что $f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2 |x|^2) \leq t \varphi_i^1(x) + K t^2 |x|^2 + o(t^2 |x|^2)$ при $x \in X, t|x| \leq \delta$ и $i \in I$. По следствию 5.2[3, с.268] имеем, что $cl I_C(x_0) = T_C(x_0)$.

Тогда из замечания 2.1 следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$. Пусть $h \in H$.

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0).$$

Положим $a_i = \varphi_i^2(h)$, $g(a) = \inf_{x \in T_C(x_0)} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$. Из леммы 1.1 следует, что $b \in \partial g(0)$ в том

и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что

$$0 \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i^1(0) + N_C(x_0), \quad b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Поэтому $\partial g(0) = \{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0\}$.

По теореме Хермандера (см.[10]) имеем, что $g(a) = \sup_{\lambda \in \partial g(0)} (\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i)$. Так как $\partial g_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, то существует точка $x = \xi(h)$, где $x \in T_C(x_0)$ такая, что

$$\begin{aligned} g(a) &= \inf_{x \in T_C(x_0)} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup_{\lambda \in \partial g(0)} (\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$E(h) = g(\varphi^2(h)) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0 \right\},$$

$$\text{где } \varphi^2(h) = (\varphi_0^2(h), \varphi_1^2(h), \dots, \varphi_m^2(h)).$$

По условию имеем, что

$$f_i(x_0 + th + t^2\xi) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(th + t^2\xi) - \varphi_i^2(th + t^2\xi) \leq o(t^2|h + t\xi|^2)$$

при $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = \min\{1, \frac{\delta}{|h|+|\xi|+1}\}$. Так как функции $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяют $(1, 2, 1, \delta, o(2))$

локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$ при $i \in I$, то

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + th + t^2\xi) - f_i(x_0) &\leq \varphi_i^1(th + t^2\xi) + \varphi_i^2(th + t^2\xi) - \varphi_i^2(th) + \varphi_i^2(th) + o(t^2|h + t\xi|^2) \leq \\ &\leq \varphi_i^1(th) + \varphi_i^1(t^2\xi) + o(t^2|h + t\xi|^2) + Kt^2|\xi|(t|h| + t^2|\xi|) + o(t^2|h|^2) + \varphi_i^2(th) \leq t^2\varphi_i^1(\xi) + t^2\varphi_i^2(h) + o_1(t^2) \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_0]$, где $\frac{o_1(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Положив $f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ имеем, что

$$f(x_0 + th + t^2\xi) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + th + t^2\xi) \leq t^2 \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi) + \varphi_i^2(h)) + o_1(t^2) \text{ при } t \in [0, t_0].$$

Так как $h \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + th + t^2\xi \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Если допустить, что $E(h) < 0$, то имеем $f(x_0 + th + t^2\xi) < 0$ при малых $t > 0$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), то получим противоречие. Теорема доказана.

Положим $\tilde{H} = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, x \in H_C(x_0)\}$.

Теорема 3.2. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхнему полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbf{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbf{R}$ выпуклые положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1, 2, 1, \delta, o(2))$ (или $(1, \mu, 1, \delta)$, где $\mu > 1$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$ при $i \in I$, $C \subset X$, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$ и существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^1(x) \geq 0$ и $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^2(x) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$.

Доказательство. Пусть $t \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет $(1, 2, 1, \delta, o(2))$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$, то $|\varphi_i^2(t_1x_1 + t_2x_2) - \varphi_i^2(t_1x_1)| \leq Kt_2|x_2|(t_2|x_2| + t_1|x_1|) + o(t_1^2|x_1|^2)$ при $x_1, x_2 \in X, t_1|x_1| \leq \delta, t_2|x_2| \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq Kt^2|x|^2$ при $t|x| \leq \delta, i \in I$. По условию имеем, что $f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2|x|^2) \leq t\varphi_i^1(x) + Kt^2|x|^2 + o(t^2|x|^2)$

при $x \in X, t|x| \leq \delta$ и $i \in I$. Тогда из доказательства теоремы 2.1 следует, что система $\varphi_0^1(x) < 0, \varphi_1^1(x) < 0, \dots, \varphi_m^1(x) < 0$ не имеет решения на $H_C(x_0)$. Поэтому $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$

Покажем, что система $\varphi_0^1(x) + \varphi_0^2(x) < 0, \varphi_1^1(x) + \varphi_1^2(x) < 0, \dots, \varphi_m^1(x) + \varphi_m^2(x) < 0$ не имеет решения на \tilde{H} . Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in \tilde{H}$ такая, что $\varphi_0^1(\bar{x}) + \varphi_0^2(\bar{x}) < 0, \varphi_1^1(\bar{x}) + \varphi_1^2(\bar{x}) < 0, \dots, \varphi_m^1(\bar{x}) + \varphi_m^2(\bar{x}) < 0$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что

$$f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(t\bar{x}) - \varphi_i^2(t\bar{x}) \leq o(t^2|\bar{x}|^2)$$

при $t \in \mathbb{R}, |t\bar{x}| \leq \delta, i \in I$. Поэтому имеем, что

$$f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i^1(\bar{x}) + t^2\varphi_i^2(\bar{x}) + o(t^2|\bar{x}|^2)$$

при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$.

Так как $\bar{x} \in \tilde{H}$, то $\bar{x} \in H_C(x_0)$ и существуют $I_0 \subset I$ и $I_1 \subset I$, где $I_0 \cup I_1 = I$, такие, что $\varphi_i^1(\bar{x}) = 0$ при $i \in I_0$ и $\varphi_i^1(\bar{x}) < 0$ при $i \in I_1$. Поэтому $\varphi_i^2(\bar{x}) < 0$ при $i \in I_0$. По условию получим, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i^1(\bar{x}) + t^2\varphi_i^2(\bar{x}) + o(t^2|\bar{x}|^2)$ при $t \in [0, \lambda_1], i \in I_1$ и $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t^2\varphi_i^2(\bar{x}) + o(t^2|\bar{x}|^2)$ при $t \in [0, \lambda_1], i \in I_0$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0, f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0, j \in J$

при $t \in (0, \lambda_2]$. Так как $\bar{x} \in H_C(x_0)$, то существует $v_0 > 0$, где $v_0 \leq \lambda_2$, такое, что $x_0 + t\bar{x} \in C$ при $t \in [0, v_0]$.

Так как x_0 -точка локального минимума в задаче (3.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0^1(x) + \varphi_0^2(x) < 0, \varphi_1^1(x) + \varphi_1^2(x) < 0, \dots, \varphi_m^1(x) + \varphi_m^2(x) < 0$ не имеет решения на \tilde{H} . По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(x)) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$. Так как \tilde{H} конус, то имеем, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^1(x) \geq 0$ и $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^2(x) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$.

Теорема доказана.

Если существует точка $\bar{x} \in \tilde{H}$ такая, что $\varphi_1^1(\bar{x}) < 0, \dots, \varphi_m^1(\bar{x}) < 0$ и $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$ и выполняются условия теоремы 3.2, то $\alpha_0 > 0, \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

Пусть X и Y -счетно-банаховы пространства, топологии которых задаются семейством направленных норм $\{x \rightarrow \|x\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{y \rightarrow \|y\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ соответственно, $F: X \rightarrow Y$ отображение, $\|\cdot\|_k \in \{\|\cdot\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \|\cdot\|_s \in \{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Через X_k обозначим пространство X с нормой $\|x\|_k$, а через Y_s обозначим пространство Y с нормой $\|y\|_s$.

Пусть $B_k(0, \delta) = \{x \in X: \|x\|_k \leq \delta\}$, $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0, o(0) = 0$ и $\tilde{o}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{\tilde{o}(t)}{t} = 0, \tilde{o}(0) = 0$.

Отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, v, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$ с постоянной K в точке $\bar{x} \in X$, если F удовлетворяет условию $\|F(\bar{x} + x + z) - F(\bar{x} + x) - S(x + z) + S(x)\|_s \leq K \|z\|_k^v (\|x\|_k^{\beta - \alpha v} + \|z\|_k^{\frac{\beta - \alpha v}{\alpha}}) + o(\|x\|_k^\beta)$ при $x, z \in B_k(0, \delta)$ (см.[2]). Если $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, v, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$. Если $o(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, v, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$.

Если существует функция $o: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $o(0) = 0$ такая, что $\|F(\bar{x} + x) - F(\bar{x}) - S(x)\|_s \leq o(\|x\|_k^\beta)$ при $x \in B_k(0, \delta)$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S - (o(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке \bar{x} относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$.

Если существует функция $o: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $o(0) = 0$ такая, что $f(\bar{x} + x) - f(\bar{x}) - \varphi(x) \leq o(\|x\|_k^\beta)$ при $x \in B_k(0, \delta)$, то функцию f назовем $\varphi - (o(\beta), \delta)$ локально верхней полулипшицевой в точке \bar{x} относительно $\|x\|_k$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, f_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,m, F(x)=0, x \in C \quad (3.2)$$

где $f_j: X \rightarrow \mathbf{R}$, $j \in I = \{0,1,\dots,m\}$, $F: X \rightarrow Y$ оператор, $C \subset X$. Пусть $I_C(x_0)$ ($T_C(x_0)$) множество всех гиперкасательных (касательных) к множеству C в точке $x_0 \in C$ относительно X_k и пусть $N_C(x_0) = T_C^-(x_0)$ в X_k .

Положим $\Lambda x = F'(x_0)x$, $H = \{x \in X: \varphi_i^1(x) \leq 0, i=0,1,\dots,m, \Lambda x = 0, x \in I_C(x_0)\}$, $g_{(a,y)}(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y)}(x)$, где $(a,y) \in \mathbf{R}^{m+1} \times Y$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Теорема 3.3. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (3.2) в X_k , $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхнему полулипшицеву условию в точке x_0 относительно нормы $\|\cdot\|_k$, $\varphi_i^1: X_k \rightarrow \mathbf{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2: X_k \rightarrow \mathbf{R}$ положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1, \mu, 1, \delta)$, где $\mu > 1$, (или $(1, 2, 1, \delta, o(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль при $i \in I$ относительно нормы $\|\cdot\|_k$, отображение $F: X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируемо в точке x_0 , $F'(x_0)(X) = Y$ и F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - (o(2), \delta)$ локально липшицеву условию в точке x_0 относительно пары $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s)$, $S: X_k \rightarrow Y_s$ положительный однородный степени 2 оператор и удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ (или $(1, 2, 1, \delta, \tilde{o}(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно пары $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s)$, $\partial g_{(a,y)}^*(0) \neq \emptyset$ в X_k при $(a,y) \in \mathbf{R}^{m+1} \times Y$, $C \subset X$ и $I_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda \neq \emptyset$, где $\Lambda x = F'(x_0)x$, то

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) + \langle y^*, S(h) \rangle : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \right.$$

$$\left. x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in H \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $t \geq 0$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2: X \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $\|\cdot\|_k$, то $|\varphi_i^2(t_1 x_1 + t_2 x_2) - \varphi_i^2(t_1 x_1)| \leq K t_2 \|x_2\|_k (t_2^{\mu-1} \|x_2\|_k^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|_k^{\mu-1})$ при $x_1, x_2 \in X$, $t_1 \|x_1\|_k \leq \delta$, $t_2 \|x_2\|_k \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq K t^\mu \|x\|_k^\mu$ при $t \|x\|_k \leq \delta$, $i \in I$, где $\mu > 1$. По условию функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $\|\cdot\|_k$. Поэтому

$$f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2 \|x\|_k^2) \leq \varphi_i^1(tx) + K t^\mu \|x\|_k^\mu + o(t^2 \|x\|_k^2)$$

при $x \in X$, $t\|x\|_k \leq \delta$ и $i \in I$. Так как $S: X \rightarrow Y$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно пары $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s)$, где $\mu > 1$, то $\|S(t_1x_1 + t_2x_2) - S(t_1x_1)\|_s \leq Kt_2\|x_2\|_k (t_2^{\mu-1}\|x_2\|_k^{\mu-1} + \|t_1x_1\|_k^{\mu-1})$ при $x_1, x_2 \in X$, $t_1\|x_1\|_k \leq \delta$, $t_2\|x_2\|_k \leq \delta$. Поэтому $\|S(tx)\|_s \leq Kt^\mu\|x\|_k^\mu$ при $x \in X$, $t\|x\|_k \leq \delta$.

Из неравенства $\|F(x_0 + tx) - F(x_0) - F'(x_0)tx - S(tx)\|_s \leq o(t^2\|x\|_k^2)$ при $x \in X$, $t\|x\|_k \leq \delta$ имеем, что $\|F(x_0 + tx) - F'(x_0)tx - F(x_0)\|_s \leq Kt^\mu\|x\|_k^\mu + o(t^2\|x\|_k^2)$ при $x \in X$, $t\|x\|_k \leq \delta$. Тогда из замечания 2.2 следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda$. Пусть $h \in H$.

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0), \quad \Lambda x + S(h) = 0.$$

Положим $a_i = \varphi_i^2(h)$, $y = S(h)$ и $g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$. Из леммы 1.1 следует,

что $(y^*, b) \in \partial g(0, 0)$ в том и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что

$$-\Lambda^*y^* \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i^1(0) + N_C(x_0) \quad \text{и} \quad b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \partial g(0, 0) = \{ & (y^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \\ & y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^*y^* = 0 \}. \end{aligned}$$

По теореме Хермандера (см.[10]) имеем, что $g(y, a) = \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i)$.

Так как $\partial g_{(a,y)}^*(0) \neq \emptyset$ при $(a, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y$, то существует точка $x = \xi(h)$, где $x \in T_C(x_0)$, $\Lambda x + S(h) = 0$ такая, что

$$\begin{aligned} g(y, a) &= \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \\ &= \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) = \sup \{ \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \\ & p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^*y^* = 0 \}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E(h) = g(S(h), \varphi^2(h)) &= \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup \{ \langle y^*, S(h) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \\ & \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^*y^* = 0 \}, \end{aligned}$$

где $\varphi^2(h) = (\varphi_0^2(h), \varphi_1^2(h), \dots, \varphi_m^2(h))$, $\Lambda \xi(h) + S(h) = 0$.

Так как F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - (o(2), \delta)$ локально липшицеву условию в точке x_0 относительно пары нормы $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s)$, то

$$\|F(x_0 + th + t^2\xi) - F(x_0) - \Lambda(th + t^2\xi) - S(th + t^2\xi)\|_s \leq o(\|th + t^2\xi\|_k^2)$$

при $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = \min\{1, \frac{\delta}{\|h\|_k + \|\xi\|_k + 1}\}$. Поэтому из соотношения $\Lambda h = 0$ и $\Lambda \xi + S(h) = 0$ имеем, что

$$\|F(x_0 + th + t^2\xi) - F(x_0) + S(th) - S(th + t^2\xi)\|_s \leq o(\|th + t^2\xi\|_k^2)$$

при $t \in [0, t_0]$. Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} \|F(x_0 + th + t^2\xi)\|_s &\leq \|S(th + t^2\xi) - S(th)\|_s + o(\|th + t^2\xi\|_k^2) \leq \\ &\leq Kt^2\|\xi\|_k (\|th\|_k^{\mu-1} + \|t^2\xi\|_k^{\mu-1}) + o(\|th + t^2\xi\|_k^2) = o_1(t^2) \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_0]$, где $\frac{o_1(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. По теореме Люстерника [9, с.33] существуют $r: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ и число $m > 0$ такие, что $F(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) = 0$ и $\|r(t)\|_k \leq m\|F(x_0 + th + t^2\xi)\|_s = o_2(t^2)$ при $t \in [0, t_0]$, где $r(t) = x(x_0 + th + t^2\xi)$, $o_2(t) = m o_1(t)$, $\frac{o_2(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Также имеем, что существует число $t_1 > 0$, где $t_1 \leq t_0$, такое, что

$$f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(th + t^2\xi + r(t)) - \varphi_i^2(th + t^2\xi + r(t)) \leq o(\|th + t^2\xi + r(t)\|_k^2)$$

при $t \in [0, t_1]$. По условию $\varphi_i^1(x)$ сублинейная непрерывная функция в X_k . Тогда существует число $c > 0$ такое, что $|\varphi_i^1(x)| \leq c\|x\|_k$ при $x \in X$ и $i \in I$. Поэтому $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \varphi_i^1(r(t)) = \lim_{t \downarrow 0} \varphi_i^1(\frac{1}{t^2} r(t)) = 0$, т.е.

$\varphi_i^1(r(t)) = o_3(t^2)$, где $\frac{o_3(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) - f_i(x_0) &\leq \varphi_i^1(th + t^2\xi + r(t)) + \varphi_i^2(th + t^2\xi + r(t)) - \varphi_i^2(th) + \\ &+ \varphi_i^2(th) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|_k^2) \leq \varphi_i^1(th) + \varphi_i^1(t^2\xi) + \varphi_i^1(r(t)) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|_k^2) + \\ &+ K\|t^2\xi + r(t)\|_k (\|th\|_k^{\mu-1} + \|t^2\xi + r(t)\|_k^{\mu-1}) + \varphi_i^2(th) \leq t^2\varphi_i^1(\xi) + t^2\varphi_i^2(h) + o_4(t^2) \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_1]$, где $\frac{o_4(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Положив $f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ имеем, что $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) \leq t^2 \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi) + \varphi_i^2(h)) + o_4(t^2)$ при $t \in [0, t_1]$.

Так как $h \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + th + t^2\xi + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Если допустить, что $E(h) < 0$, то имеем $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) < 0$ при малых $t > 0$. Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (3.2), то получим противоречие.

Теорема доказана.

Замыкание множества H в X_k обозначим через clH . Если $H \neq \emptyset$, то при условии теоремы 3.3 имеем, что

$$clH = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, F'(x_0)x = 0, x \in T_C(x_0)\}.$$

Поэтому если $H \neq \emptyset$, $h \rightarrow E(h)$ непрерывная функция в clH и выполняются условия теоремы 3.3, то $E(h) \geq 0$ при $h \in clH$.

Список литературы:

1. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку.: Элм, 1996.- 148 с.
2. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing. 2014.-359 p.
3. Rockafellar R.T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions.// Canad.J. Math.-1980. №2(32).-P.257-280.
4. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. -М.: Мир, 1988.- 510 с.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. -М.: Наука, 1988.-280 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория.-М.: Наука, 1962.-895 p.
7. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14).-С.44-55.
8. Sadygov M.A. Nondifferentiable optimization.// Scitechnology scientific journal.-2018.-№ 9. - P.31-42.
9. Алексеев В.М., Галаев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. -М.: Наука, 1984.-288 с.
10. Лоран Р.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. -М.: Мир, 1975.- 496 с.

Сармасов С.Н.¹,

кандидат физико-математических наук, преподаватель;

Рахимов Р.Ш.²,

кандидат физико-математических наук, преподаватель, доцент;

Исмаилова Р.Н.³

кандидат физико-математических наук, преподаватель;

кафедра общей физики и методики преподавания физики,

Бакинский Государственный Университет,

г Баку, Азербайджанская Республика

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ $Pb_{1-x}Sn_xTe$ ВБЛИЗИ ИНВЕРСИИ ЗОН

Sarmasov S.N.¹,

candidate of physical and mathematical sciences, Lecturer;

Rahimov R.Sh.²,

candidate of physics and mathematics, Lecturer, docent;

Ismailova R.N.³

candidate of physical and mathematical, Lecturer;

General physics and teaching methods of physics department,

Baku State University,

Baku, Republic of Azerbaijan

TEMPERATURE DEPENDENCE OF RESISTIVITY OF THE $Pb_{1-x}Sn_xTe$ NEAR THE INVERSION ZONES

Аннотация. Найдена корреляция температуры фазового перехода в составах $Pb_{1-x}Sn_xTe$ в окрестности инверсии зон. Исследована температурная зависимость удельного сопротивления составов с малой концентрацией носителей ($\rho < 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Рассмотрено межзонное взаимодействие в модели сегнетоэлектричества исходя из модели кулоновского межзонного взаимодействия.

Abstract. Temperature correlation of phase transition in $Pb_{1-x}Sn_xTe$ compositions were observed in vicinity of inversion zone. Temperature dependence of resistivity on the composition with low carrier concentration ($\rho < 10^{19} \text{ см}^{-3}$) has been investigated. The interband interaction on the basis of ferroelectricity model, observed from Coulomb model of interband interaction is considered.

Ключевые слова: температурная зависимость, межзонное взаимодействие, корреляция температуры, проводимость, удельное сопротивление.

Keywords: temperature dependence, interband interaction, correlation of temperature, conductivity, resistivity.

В полупроводниках с концентрацией электрически активной примеси до 10^{17} см^{-3} степень заполнения энергетических уровней электронами в зоне проводимости или дырками в валентной зоне низка (невыврожденный электронный газ). Поэтому все свободные носители беспрепятственно изменяют

свою энергию под действием электрического поля и дают вклад в электропроводность.

Температурная зависимость удельной проводимости в полупроводниках обусловлена изменением концентрации носителей заряда (электронов и

дырок). Изменение длины свободного пробега оказывается на много порядков меньше и им можно пренебречь. Концентрация носителей заряда в полупроводнике зависит не только от температуры, а и от количества и типа примеси в нем.

Структура поверхности кристалла интересна во многих отношениях. Например, интересна связь между структурой поверхности чистого кристалла и природой и энергией образования поверхностных комплексов адсорбент-адсорбат. Особый интерес поверхностные свойства представляют в связи с высокой концентрацией в халькогенидах свинца.

Нами найдена корреляция температуры сегнетоэлектрического фазового перехода T_n и ширины запрещенной зоны E_g в составах $Pb_{1-x}Sn_xTe$ в окрестности инверсии зон ($x = 0,4 \div 0,6$). Исследовались температурные зависимости удельного сопротивления ρ составов с малой концентрацией носителей $p < 10^{19} \text{ см}^{-3}$ в диапазоне ($x = 0,2 \div 0,75$). Измерения проводились четырех зондовым методом на переменном токе при температуре $\sim 120\text{K}$. Вблизи T_n происходит аномальное увеличение ρ , которое наиболее отчетливо наблюдается в образцах с малой концентрацией носителей. Соответствие аномалии ρ сегнетоэлектрическому фазовому переходу в этих составах убедительно показано Кобаяши и др. [1, 2], где одновременно с измерениями фиксировалось смягчение сегнетоэлектрической моды методом неупругого рассеяния нейтронов. По аномалиям в температурном ходе ρ определялось T_n .

Обнаружена немонотонная зависимость T_n от состава (минимум в районе инверсии зон). Результаты вдали от области инверсии согласуются с известными литературными данными.

Интерпретация результатов сделана в рамках межзонной модели сегнетоэлектричества. Согласно работе [3], в окрестности инверсии наряду с электрон-фононным взаимодействием необходимо учитывать кулоновское спаривание электронов из разных зон, которое становится существенным при $E_g \leq E_e$. Это приводит к эффективной перенормировке E_g и, как следствие этого, к немонотонной зависимости T_n от x .

Обычно кулоновское межзонное взаимодействие в модели сегнетоэлектричества не учитывается. При фиксированной щели $E_g > E_e$, где E_e -

энергия кулоновского экситона, а электрон дырочное спаривание невозможно [3] и учет кулоновского взаимодействия не приводит к новым эффектам, а сводится просто к перенормировке межзонной электрон-фононной константы связи [4]. Если же $E_g \leq E_e$, то электрон дырочное спаривание приводит к перестройке спектра в окрестности $\min \varepsilon_1$ и $\max \varepsilon_2$. Поскольку для структурного перехода существенна вся зона экситонная щель оказывается несущественной. Исключение может составить случай малого значения E_g , возможное в $Pb_{1-x}Sn_xTe$, когда экситонная щель $\Delta_s \geq E_g$ [5]. При этом кулоновское взаимодействие может привести к качественным изменениям. При $E_g \leq E_e$ межзонное кулоновское взаимодействие приводит к экситонному спариванию и перестройке спектра ($T=0$): [4]

$$E(p) = \pm[\varepsilon^2(p) + \Delta_s^2(p)]^{1/2} \quad (1)$$

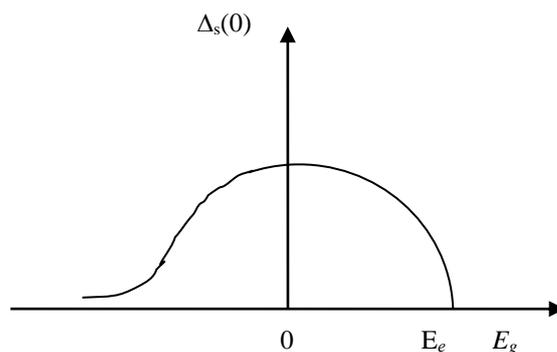
где $\varepsilon(p) = \varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, а Δ_s - экситонная щель.

Считая, что $\varepsilon(p) = E_g / 2 + p^2 / 2m$ и $\Delta_s(p)$ есть функция E_g , и в окрестности $p=0$ может быть определена для $E_g \neq 0$, $E_g < E_e$

$$2\Delta_s(0) = E_e [2(1 - E_g / E_e)]^{1/2} \quad (2)$$

где $E_e = 6,8(me^4/m_0e_0^4)$ 'эВ; e_0 и m_0 - масса и заряд свободного электрона. В твердых растворах халькогенидов $m \ll m_0$, обычно $m \approx 10^{-2}m_0$, а e может существенно превышать e_0 [6], то есть E_e может достигать нескольких десятых электрон-вольта. В окрестности $E_g=0$ соотношение меняется и для $E_g = 0$, $\Delta_s(0) = 5,5(me/m_0e_0)$ эВ, а при $E_g < 0$ (полуметалл) $\Delta_s(0)$ экспоненциально убывает с ростом $|E_g|$. Качественно зависимость $\Delta_s(0)$ от E_g представлена на рис. Без учета кулоновского взаимодействия температура перехода может быть представлена в виде [7]:

$$T_c(E_g) = T_c(0) - \alpha E_g^n \quad (3)$$



где $T_c(0)$, α и n однозначно определяются структурой спектра.

Как видно, при $E_g \rightarrow 0$ T_c растет, достигая максимального значения при $E_g = 0$. Таким образом, при $E_g > E_e$, $E_g \rightarrow E_e$ и T_c растет, достигая максимального значения при $E_g = E_e$. С дальнейшим уменьшением E_g включается кулоновское взаимодействие, и T_c должна падать, принимая минимальное значение при $E_g = 0$. При $E_g < 0$ происходит инверсия зон и E_g всегда больше нуля, Δ_s быстро уменьшается, T_c растет. Следовательно, в окрестности бесщелевого состояния T_c принимает минимальное, а не максимальное значение. В халькогенидах $Pb_{1-x}Sn_xTe$ ширина запрещенной зоны – функция x , следовательно, в ряду твердых растворов $T_c(x)$ должна вести себя существенно немонотонно.

Естественно детальное исследование (концентрационная и температурная зависимости, форма слева и справа от $E_g \approx 0$) представляет большой интерес для становления и развития межзонной модели сегнетоэлектричества.

Список литературы/ References

1. М. Грин. Поверхностные свойства твердых тел. Издательств «Мир», Москва 1972, с.432.
2. Т.В. Бланк, Ю.А. Гольдберг. ФТП, 41 (11), 1281 (2007).
3. С.И. Покутний. Энергия связи экситона в полупроводниковых квантовых точках. Физика и техника полупроводников, 2010, том 44, вып. 4
4. S.I. Pokutnyi. Phys. Lett. A, 342, 347 (2005)
5. Ю.И.Равич, С.А.Немов . ФТП, 2002, т.36, вып.1, с.3-23.
6. H.Kawamura. Proc.III Int. Conf. On Physics of Narrow gap Semicond., p.7. Warszawa, 1977.
7. Бурсиан Э.В., Гиршберг Я.Г., Трунов Н.Н. Межзонная модель сегнетоэлектричества. Теория и эксперимент.- Изв.ВУЗов, Физика, 1981, 8, с.94-109.

Айтенова Г.М.

PhD студент

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова

Абдикаликова Г.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры математики

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова

Сартабанов Ж.А.

доктор физико-математических наук, профессор

профессор кафедры математики

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Aitenova G.M.

PhD student

K.Zhubanov Aktobe Regional State University

Abdikalikova G.A.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Associate Professor of Department Mathematics

K.Zhubanov Aktobe Regional State University

Sartabanov Zh.A.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Professor of the Department Mathematics

K.Zhubanov Aktobe Regional State University

EXISTENCE OF THE MULTIPERIODICAL SOLUTION OF ONE SYSTEM THE INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Аннотация: Исследуется система интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля. Построен матрицант удовлетворяющий матричному уравнению и получены некоторые её свойства и оценки, связанные с многопериодичностью по временным переменным. Установлены достаточные условия существования и единственности многопериодического по всем независимым переменным решения системы интегро-дифференциальных уравнений.

Abstract: Researched the system of Volterra type integro-differential equations with the differentiation operator by directions of the vector field. Constructed the matricant satisfies the matrix equation and obtained some of its properties and estimates that are related to multiperiodical in time variables. Established sufficient conditions the existence and uniqueness of the multiperiodical in all independent variables of the solution system integro-differential equations

Ключевые слова: матрицант, многопериодичность, резольвента, ядро, Коши, Грин.

Keywords: matricant, multiperiodical, resolvent, kernel, Cauchy, Green.

Постановка проблемы. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$D_c u(\tau, t) = A(\tau, t)u(\tau, t) + \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau, t, s, \sigma)u(s, \sigma)ds + f(\tau, t) \quad (1)$$

Здесь $D_c = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle c, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$, $u(\tau, t)$ - искомая вектор-функция переменных $(\tau, t) \in R \times R^m$, c - постоянный m -вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -знак скалярного произведения, $\sigma = \sigma_0 + c\tau = t - c\tau + c\tau$ - характеристика оператора D_c , $A(\tau, t)$ и $K(\tau, t, s, \sigma)$ - $n \times n$ -матрицы, $f(\tau, t)$ - n -вектор-функция.

Предположим выполненными условия (θ, ω) -периодичности, непрерывности по $\tau \in R$ и непрерывной дифференцируемости по $t \in R^m$

$$A(\tau + \theta, t + q\omega) = A(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0, \epsilon)}(R \times R^m), \quad q \in Z^m \quad (2)$$

$$K(\tau + \theta, t + q\omega, s, \sigma) = K(\tau, t, s, \sigma) \in C_{\tau, t, s, \sigma}^{(0, e, 0, e)}(R \times R^m \times R \times R^m), \quad q \in Z^m \quad (3)$$

$$f(\tau + \theta, t + q\omega) = f(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0, e)}(R \times R^m), \quad q \in Z^m \quad (4)$$

где $e = (1, \dots, 1)$ - m -вектор, показатель степени гладкости по $t = (t_1, \dots, t_m)$, Z^m - множество целочисленных векторов $q = (q_1, \dots, q_m)$, $q\omega = (q_1\omega_1, \dots, q_m\omega_m)$ - кратный период с кратностью q периода $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, периоды $\omega_0 = \theta$, $\omega_1, \dots, \omega_m$ - рационально несоизмеримые положительные постоянные.

Построение конструктивных методов исследования задач, создание новых подходов решения таких задач для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений с частными производными актуальны как для расширения класса разрешимых задач, так и для применения математических методов.

Анализ исследований и публикаций. Интегро-дифференциальные уравнения возникают во многих разделах прикладной математики. Как известно, исследованием теории интегро-дифференциальных уравнений занимались многие авторы. Проблемам теории периодических и почти периодических колебаний, условиям существования ограниченных, почти периодических и периодических решений посвящены работы многих авторов, отметим [1-3]. В [4] рассмотрены распространение результатов М.Урабе на системы интегро-дифференциальных уравнений, исследованы представления решения интегро-дифференциальных уравнений через резольвенту ядра [5], указана роль этих уравнений при описании процессов с последствиями [6], применение их в математической биологии [7]. Исследования почти периодических решений систем уравнений с квазипериодическими правыми частями [8], почти периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа переноса [9-10], существование и построение многопериодических и псевдопериодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих пространственную переменную рассмотрены в [11].

Постановка задачи. Цель настоящей работы – установить достаточные условия существования и единственности многопериодического решения системы интегро-дифференциального уравнения (1).

Изложение основного материала. По известной методике [9] построения матрицанта уравнения $D_c w = A(\tau, t)w$ определим матрицу $W(\tau_0, \tau, t)$ на основе интегрального матричного уравнения

$$W(\tau_0, \tau, t) = E + \int_{\tau_0}^{\tau} A(s, t - c(\tau - s))W(\tau_0, s, t - c(\tau - s))ds \quad (5)$$

с единичной n -матрицей E . На основе (2) матрицант $W(s, \tau, t)$ обладает свойством: $W(s + \theta, \tau + \theta, t + q\omega) = W(s, \tau, t) \in C_{s, \tau, t}^{(0, 0, e)}(R \times R \times R^m)$, $q \in Z^m$ Решение интегрального уравнения (5) ищем в виде ряда

$$W(\tau_0, \tau, t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(\tau_0, \tau, t) \quad (6)$$

члены которого находим из рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} W_0(\tau_0, \tau, t) &= E, \\ W_1(\tau_0, \tau, t) &= \int_{\tau_0}^{\tau} A(s, t - c(\tau - s))W_0(\tau_0, s, t - c(\tau - s))ds = \int_{\tau_0}^{\tau} A(s, t - c(\tau - s))ds, \dots, \\ W_m(\tau_0, \tau, t) &= \int_{\tau_0}^{\tau} A(s, t - c(\tau - s))W_{m-1}(\tau_0, s, t - c(\tau - s))ds, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Непосредственно можно убедиться в абсолютной и равномерной сходимости ряда (6). Используя замену

$$u(\tau, t) = W(\tau_0, \tau, t)v(\tau, t) \quad (7)$$

из уравнения соответствующего неоднородному интегро-дифференциальному уравнению (1) имеем

$$D_c v(\tau, t) = \int_{\tau}^{\tau+\theta} Q(\tau_0, \tau, t, s, t - c(\tau - s)) v(s, t - c(\tau - s)) ds \quad (8)$$

с ядром

$$Q(\tau_0, \tau, t, s, \sigma) = W^{-1}(\tau_0, \tau, t) K(\tau, t, s, \sigma) W(\tau_0, s, \sigma).$$

Заметим, что на основании условия (3) ядро обладает свойством диагональной многопериодичности:

$$Q(\tau_0 + \theta, \tau + \theta, t + q\omega, s + \theta, t + q\omega - c(\tau + \theta) + c(s + \theta)) = Q(\tau_0, \tau, t, s, t - c(\tau - s)), \quad q \in Z^m.$$

Матрицант $V(\tau_0, \tau, t)$ уравнения (8) определим интегральным матричным уравнением

$$V(\tau_0, \tau, t) = E + \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\eta}^{\eta+\theta} Q(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)) V(\tau_0, s, t - c(\tau - s)) ds d\eta \quad (9)$$

Решение уравнения (9) ищем так:

$$V(\tau_0, \tau, t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(\tau_0, \tau, t) \quad (10)$$

с начальным приближением $V_0(\tau_0, \tau_0, t) = E$ и $V_m(\tau_0, \tau, t)$ находим из соотношения

$$V_m(\tau_0, \tau, t) = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\eta}^{\eta+\theta} Q(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)) V_{m-1}(\tau_0, s, t - c(\tau - s)) ds d\eta, \quad m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Отметим, что ядро интегро-дифференциального уравнения определяется через рекуррентные соотношения. Установлены справедливость оценок:

$$\begin{aligned} \|Q_1(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))\| &\leq Q_0, \quad Q_0 = \text{const}, \dots, \\ \|Q_m(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))\| &\leq Q_0^m \frac{\theta^{m-1} (\tau - \eta)^{m-1}}{(m-1)!} \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что все итерированные ядра $Q_m(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$ обладают свойством (θ, ω) -периодичности:

$$Q_m(\tau_0 + \theta, \eta, t + q\omega - c((\tau + \theta) - \eta), s, t + q\omega - c((\tau + \theta) - s)) = Q_m(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$$

Можно показать, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} Q_m(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$ сходится абсолютно и равномерно к непрерывной функции $R(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$, называемое резольвентой, которая при $\eta = \tau$ обращается в ядро $Q(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} R(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)) &= Q(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)) + \\ &+ \int_{\eta}^{\tau} \int_{\eta}^{\eta+\theta} Q(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)) R(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)) ds d\eta \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, некоторые свойства резольвенты:

1) $R(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (8).

2) Резольвента $R(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s))$ является многопериодической функцией:

$$\begin{aligned} R(\tau_0 + \theta, \eta, t + q\omega - c((\tau + \theta) - \eta), s, t + q\omega - c((\tau + \theta) - s)) = \\ = R(\tau_0, \eta, t - c(\tau - \eta), s, t - c(\tau - s)), \quad q \in Z^m. \end{aligned}$$

С учетом (7) имеем $U(\tau_0, \tau, t) = W(\tau_0, \tau, t)V(\tau_0, \tau, t)$. Предположим, что матрица уравнения

$$DU(\tau_0, \tau, t) = A(\tau, t)U(\tau_0, \tau, t) + \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau, t, s, t - c(\tau - s))U(\tau_0, s, t - c(\tau - s))ds \quad (14)$$

с условием $U(\tau_0, \tau_0, t) = E$ разлагается на сумму

$$U(\tau_0, \tau, t) = U_+(\tau_0, \tau, t) + U_-(\tau_0, \tau, t) \quad (15)$$

матричных решений $U_+(\tau_0, \tau, t)$ и $U_-(\tau_0, \tau, t)$ рассматриваемого уравнения, удовлетворяющие оценкам

$$|U_+(\tau_0, \tau, t)| \leq \delta_+ e^{-\gamma(\tau - \tau_0)}, \quad \tau_0 \leq \tau, \quad (16a)$$

$$|U_-(\tau_0, \tau, t)| \geq \delta_- e^{\gamma(\tau - \tau_0)}, \quad \tau_0 \leq \tau, \quad (16b)$$

где $\delta = \max\{\sup|U_+(\tau_0, \tau, t)|, \sup|U_-(\tau_0, \tau, t)|\}$, $\gamma \geq \delta \tilde{k}$, $\tilde{k} = \sup|K(s, t - c(\tau - s))|$. Учитывая (14)-(16) можно построить матрицу типа Грина в виде

$$G(\tau_0, \tau, t) = \begin{cases} U_+(\tau_0, \tau, t), & \tau_0 \leq \tau, \\ -U_-(\tau_0, \tau, t), & \tau_0 > \tau. \end{cases} \quad (16c)$$

Отметим, что $U_+(\tau_0, \tau, t)$ и $U_-(\tau_0, \tau, t)$ кроме свойств непрерывности и непрерывной дифференцируемости, обладают свойством многопериодичности

$$\begin{aligned} U_+(\tau_0 + \theta, \tau + \theta, t + q\omega) = U_+(\tau_0, \tau, t) \in C_{\tau_0, \tau, t}^{(0,0,e)}(R \times R \times R^m), \\ U_-(\tau_0 + \theta, \tau + \theta, t + q\omega) = U_-(\tau_0, \tau, t) \in C_{\tau_0, \tau, t}^{(0,0,e)}(R \times R \times R^m). \end{aligned}$$

Задача. Найти функцию $u(\tau, t)$ удовлетворяющую интегро-дифференциальному уравнению (1) и начальному условию

$$u(\tau_0, t) = \varphi(t) \in C_t^e(R^m) \quad (17)$$

Решение задачи Коши (1), (17) ищем в виде

$$u(\tau, t) = u_-(\tau, t) + u_+(\tau, t) \quad (18)$$

Где

$$u_-(\tau, t) = U_-(\tau_0, \tau, t)\varphi(t - c(\tau - \tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_-(s, \tau, t - c(\tau - s))f(s, t - c(\tau - s))ds \quad (18a)$$

$$u_+(\tau, t) = U_+(\tau_0, \tau, t)\varphi(t - c(\tau - \tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_+(s, \tau, t - c(\tau - s))f(s, t - c(\tau - s))ds \quad (18b)$$

Рассмотрим два случая i) $\tau \geq \tau_0$ и ii) $\tau < \tau_0$.

I. В случае i) $\tau \geq \tau_0$ функцию $\varphi(t)$ постараемся определить из соотношения

$$u_-(\tau, t) = U_-(\tau_0, \tau, t)\varphi(t - c(\tau - \tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_-(s, \tau, t - c(\tau - s))f(s, t - c(\tau - s))ds.$$

II. В случае ii) $\tau < \tau_0$ начальную функцию определим из уравнения

$$u_+(\tau, t) = U_+(\tau_0, \tau, t)\varphi(t - c(\tau - \tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_+(s, \tau, t - c(\tau - s))f(s, t - c(\tau - s))ds$$

на основе необходимого и достаточного условия многопериодичности Умбетжанова-Сартабанова

$$u(\tau_0 + \theta, t) = u(\tau_0, t) \in C_{\tau_0, t}^{(0, e)}(R \times R^m) \quad (19)$$

методом последовательных приближений, ищем среди решений (18) многопериодическое решение системы (1). Учитывая (16с), найденные в $(-\infty, \tau_0)$ и $(\tau_0, +\infty)$ решения имеем:

$$u^*(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\tau} G(\tau_0, s, t - c(\tau - s))f(s, t - c(\tau - s))ds \quad (20)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Если выполнены условия (2)-(4) и $\gamma \geq \delta \tilde{k}$, то система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с оператором дифференцирования (1) имеет единственное многопериодическое решение (20), удовлетворяющее условию

$$\|u^*(\tau, t)\| \leq \frac{\delta}{\gamma} f_0.$$

Выводы и перспективы. Для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля, не содержащих пространственных переменных построен матрицант удовлетворяющий матричному уравнению.

Найдены представимость многопериодического решения рассматриваемой интегро-дифференциальной системы через резольвенту ядра, получены рекуррентные соотношения и оценки. Установлены достаточные условия существования и единственности многопериодического по всем независимым переменным решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Заметим, что доказанная теорема остается справедливой, когда матричная функция Грина линейной системы обладает свойством экспоненциальной дихотомичностью.

Список литературы:

1. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. -Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т., 1957. - 328 с.
2. Massera I.L. Linear differential equations and functional analysis //I.L.Massera, I.I.Schaffer //I. Annals of math. -1958. -67, -№3. -Pp.517-573.
3. Langenhop C.E. Note on Almost Periodic solutions of Nonlinear Differential Equations //C.E.Langenhop //Jour. Math. Phys., -1959. -38. Pp. 126-129.

4. Самойленко А.М. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера //А.М.Самойленко, О.Д.Нуржанов //Дифференц. уравнения. - 1979. -15, -№8. -С.1503-1517.

5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. -224 с.

6. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. -Бишкек: Илим, 1992. -112 с.

7. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М.: Высшая школа, 1995. -301 с.

8. Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. -Алма-Ата: Наука, 1970. -200 с.

9. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. -Алма-Ата: Наука, 1990. -184 с.

10. Умбетжанов Д.У. О существовании почти многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных //Д.У.Умбетжанов, А.Б.Бержанов //Иzv.АН КазССР.Сер.физ.-мат.-1983.-№5.-С.11-15.

11. Сартабанов Ж.А. Псевдопериодические решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений //Ж.А. Сартабанов //Укр.математ. журнал. -1989. -41, -№1. -С.125-130.

#3 (43), 2019 część 1
Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe
(Warszawa, Polska)
Czasopismo jest zarejestrowane i publikowane w Polsce. W czasopiśmie publikowane są artykuły ze wszystkich dziedzin naukowych. Czasopismo publikowane jest w języku polskim, angielskim, niemieckim i rosyjskim.

Artykuły przyjmowane są do dnia 30 każdego miesiąca.

Częstotliwość: 12 wydań rocznie.

Format - A4, kolorowy druk

Wszystkie artykuły są recenzowane

Każdy autor otrzymuje jeden bezpłatny egzemplarz czasopisma.

Bezpłatny dostęp do wersji elektronicznej czasopisma.

Zespół redakcyjny

Redaktor naczelny - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

Rada naukowa

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

Dawid Kowalik (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Peter Clarkwood (University College London)

#3 (43), 2019 part 1
East European Scientific Journal
(Warsaw, Poland)
The journal is registered and published in Poland. The journal is registered and published in Poland. Articles in all spheres of sciences are published in the journal. Journal is published in **English, German, Polish and Russian.**

Articles are accepted till the 30th day of each month.

Periodicity: 12 issues per year.

Format - A4, color printing

All articles are reviewed

Each author receives one free printed copy of the journal

Free access to the electronic version of journal

Editorial

Editor in chief - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

The scientific council

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

Dawid Kowalik (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Peter Clarkwood (University College London)

Igor Dzedzic (Polska Akademia Nauk)
Alexander Klimek (Polska Akademia Nauk)
Alexander Rogowski (Uniwersytet Jagielloński)
Kehan Schreiner(Hebrew University)
Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
Mikołaj Żukowski (Uniwersytet Warszawski)
Mateusz Marszałek (Uniwersytet Jagielloński)
Szymon Matysiak (Polska Akademia Nauk)
Michał Niewiadomski (Instytut Stosunków Międzynarodowych)
Redaktor naczelny - Adam Barczuk

1000 kopii.

Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warszawa, Polska»

Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe

Aleje Jerozolimskie 85/21, 02-001
Warszawa, Polska

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com/>

Igor Dzedzic (Polska Akademia Nauk)
Alexander Klimek (Polska Akademia Nauk)
Alexander Rogowski (Uniwersytet Jagielloński)
Kehan Schreiner(Hebrew University)
Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
Mikołaj Żukowski (Uniwersytet Warszawski)
Mateusz Marszałek (Uniwersytet Jagielloński)
Szymon Matysiak (Polska Akademia Nauk)
Michał Niewiadomski (Instytut Stosunków Międzynarodowych)
Editor in chief - Adam Barczuk

1000 copies.

Printed in the "Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warsaw, Poland»

East European Scientific Journal

Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warsaw, Poland

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com>