



#4 (44), 2019 część 4

Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe

(Warszawa, Polska)

Czasopismo jest zarejestrowane i publikowane w Polsce. W czasopiśmie publikowane są artykuły ze wszystkich dziedzin naukowych. Czasopismo publikowane jest w języku polskim, angielskim, niemieckim i rosyjskim.

Artykuły przyjmowane są do dnia 30 każdego miesiąca.

Częstotliwość: 12 wydań rocznie.

Format - A4, kolorowy druk

Wszystkie artykuły są recenzowane

Każdy autor otrzymuje jeden bezpłatny egzemplarz czasopisma.

Bezpłatny dostęp do wersji elektronicznej czasopisma.

Zespół redakcyjny

Redaktor naczelny - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

Rada naukowa

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

#4 (44), 2019 part 4

East European Scientific Journal

(Warsaw, Poland)

The journal is registered and published in Poland. The journal is registered and published in Poland.

Articles in all spheres of sciences are published in the journal. Journal is published in **English, German, Polish and Russian.**

Articles are accepted till the 30th day of each month.

Periodicity: 12 issues per year.

Format - A4, color printing

All articles are reviewed

Each author receives one free printed copy of the journal

Free access to the electronic version of journal

Editorial

Editor in chief - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

The scientific council

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

**Dawid Kowalik (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
**Peter Clarkwood(University College
London)**
Igor Dziedzic (Polska Akademia Nauk)
**Alexander Klimek (Polska Akademia
Nauk)**
**Alexander Rogowski (Uniwersytet
Jagielloński)**
Kehan Schreiner(Hebrew University)
**Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
**Mikołaj Żukowski (Uniwersytet
Warszawski)**
**Mateusz Marszałek (Uniwersytet
Jagielloński)**
**Szymon Matysiak (Polska Akademia
Nauk)**
**Michał Niewiadomski (Instytut
Stosunków Międzynarodowych)**
Redaktor naczelny - Adam Barczuk

1000 kopii.

**Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie
85/21, 02-001 Warszawa, Polska»**

**Wschodnioeuropejskie Czasopismo
Naukowe**

Aleje Jerozolimskie 85/21, 02-001
Warszawa, Polska

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com/>

**Dawid Kowalik (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
**Peter Clarkwood(University College
London)**
Igor Dziedzic (Polska Akademia Nauk)
**Alexander Klimek (Polska Akademia
Nauk)**
**Alexander Rogowski (Uniwersytet
Jagielloński)**
Kehan Schreiner(Hebrew University)
**Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika
Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)**
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
**Mikołaj Żukowski (Uniwersytet
Warszawski)**
**Mateusz Marszałek (Uniwersytet
Jagielloński)**
**Szymon Matysiak (Polska Akademia
Nauk)**
**Michał Niewiadomski (Instytut
Stosunków Międzynarodowych)**
Editor in chief - Adam Barczuk

1000 copies.

**Printed in the "Jerozolimskie 85/21, 02-
001 Warsaw, Poland»**

East European Scientific Journal

Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warsaw, Po-
land

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com/>

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Кочетков В.С., Логанова Л.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕНИ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ДАННЫХ ИЗ XML-ФАЙЛОВ ОТ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ ФАЙЛОВ В УСЛОВИЯХ ИЗБЫТОЧНОСТИ ДАННЫХ.	4
Matmadova F.M., Huseynova M.A. USE OF OIL CHEMISTRY PRODUCTION WASTES BY TREATMENT OF WATER AND SOIL FROM OIL PRODUCTS.....	7
Недашківський Є.А. МЕТОДИКА ІНФОРМАЦІЙНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ЛІНГВІСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ.....	10
Узенгер А.А. ПОЛУЧЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ СИГНАЛОВ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА.....	17
Vlasenko T.S., Hvalin D.I., Mystetskyi V.A. COMPLEX MATHEMATICAL SIMULATION OF PHYSICAL PROCESSES IN POWERFUL GENERATOR.....	22
Колдаев А.И., Любицкий М.В., Чебанов К.А., Вдовин С.А. ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛИРУЕМЫХ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ В НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ	31

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Abdulkhayeva Z.T., Penkin O.M. THE MEAN VALUE THEOREM FOR LAPLACIAN ON THE GRAPH	35
Бовин А.А., Иванкова П.Н. ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ КУБАНИ В ЧЕРТЕ ГОРОДА КРАСНОДАРА	39
Московский С.Б., Сергеев А.Н., Сидорова Е.И., Марудов А.А. МЕТОДЫ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	44
Садыгов М.А. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ	47
Холмуродов А.Э., Дильмурадov Н., Мамасолиев Б.Ж. О ЯДРЕ ОСНОВНЫХ ГРУПП ЛИ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ	61

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Кочетков В.С.¹,
Логанова Л.В.¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева,
Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕНИ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ДАННЫХ ИЗ XML-ФАЙЛОВ ОТ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ ФАЙЛОВ В УСЛОВИЯХ ИЗБЫТОЧНОСТИ ДАННЫХ.

Аннотация. В данной работе произведено исследование и сравнение двух различных методов синтаксического анализа информации, хранящейся в XML-файлах: DOM и SAX. Выполнен анализ результатов тестирования методов парсинга на различных контрольных выборках документов, при разном объеме извлекаемых данных. В результате выполнения работы было сформулировано рекомендации по выбору оптимального метода парсинга данных.

1. Введение.

В наши дни обсуждение XML зачастую происходит в контексте Web-сервисов, преобразований Java объектов в XML и обратно, и даже использования баз данных XML вместо реляционных или объектно-ориентированных. [1] Формат очень широко используется в информационных технологиях, рекомендован Консорциумом Всемирной паутины (W3C). Примером применения технологии XML могут служить открытые данные информационной системы zakupki.gov.ru, доступные на соответствующем ftp: объем ежедневных обновлений – десятки и сотни тысяч XML файлов объемом в гигабайты или десятки гигабайт, в среднем раз в несколько недель выходит новая версия схемы данных.

При необходимости обработки больших массивов файлов, когда количество файлов исчисляется тысячами, даже незначительная экономия времени на обработке одного файла, дает ощутимую экономию времени, потраченного на обработку всех файлов. Все это обуславливает актуальность исследования методов анализа XML-файлов.

В случае с ftp-сервером государственных закупок структура данных следует за требованиями законодательства. В связи с этим информация об извещениях о проведении государственных закупок представлена более чем десятком типов документов fcsNotification* в зависимости от типа закупки (электронный аукцион fcsNotificationEF, запрос котировок fcsNotificationZK, закупка у единственного поставщика fcsNotificationEP и т. п.). Все эти документы основаны на одном базовом типе извещения, но отличаются в деталях, и это требуется учитывать при импорте анализе данных. [2]

На сайте существует ограничение в количестве результатов. Поиск выдает не более, чем 500 строк, и скачивание данных о конкурсах (в виде таблицы .csv формата) средствами сайта невозможно. При этом потребность иметь регулярно обновляемые сведения о проходящих конкурсах, попадающих под определенные критерии, возникает у каждой организации, участвующей в государственных закупках. [3]

В условиях постоянного изменения структуры данных, и их избыточности, получение данных под-

разумеает парсинг XML-файлов. При этом, поскольку каждый XML файл содержит всю информацию о закупке, которая зачастую является излишней при решении прикладной задачи, в рамках статьи проведено исследование времени получения атрибутов ограниченного набора тегов документа путем обработки файлов с помощью основных методов синтаксического анализа XML: DOM и SAX.

2. DOM-парсер.

- DOM (Document Object Model - объектная модель документов - платформенно-независимый программный интерфейс, позволяющий программными скриптами управлять содержимым документов HTML и XML, а также изменять их структуру и оформление. Модель DOM не накладывает ограничений на структуру документа. Любой документ известной структуры с помощью DOM может быть представлен в виде дерева узлов, каждый узел которого содержит элемент, атрибут, текстовый, графический или любой другой объект. Узлы связаны между собой отношениями родитель-потомок.

Способ доступа через DOM удобен, когда структура документа должна (или может) быть доступна в целом и легко модифицироваться - например так, как это происходит в документе Word или при формировании страницы DHTML.

Средства парсинга, у которых каждый анализируемый веб-документ хранится в памяти в виде иерархии его элементов (узлов), при повторном обращении к различным частям документа затрачивают меньшее время на обработку веб-документа, поскольку не нужно заново загружать и строить дерево. Такие средства предоставляют наиболее удобный способ доступа к элементам веб-документа с помощью запросов (CSS и XPath) и подходят для любых задач многократной выборки информации из веб-документа. [4]

Анализ документов методом DOM путем парсинга XML-файла предполагает создание DocumentBuilderFactory, с помощью которой создается DocumentBuilder, который, в свою очередь, выполняет разбор XML документа для создания объекта Document и последующего извлечения информации путем прохода по всем узлам (nodes) объекта для нахождения искомого атрибута.

```

if (Node.ELEMENT_NODE == node.getNodeType()) {
    Element element = (Element) node;
    try {
        notification.setPurchaseNumber(element.getElementsByTagName("purchaseNumber").item(0).getTextContent());
        //набор условий
        ...
    } catch (NullPointerException e) {
        System.out.println("тер purchaseNumber отсутствует в " + listOfFiles[i].getName());
    }
}

```

Рисунок 1. Условие извлечения тега в DOM

Поскольку DOM-парсер реализует объектную модель документа, его полезно использовать там, где требуется работать с документом целиком, как с деревом. Представление всего документа будет занимать в памяти значительный объем, поэтому DOM резонно считается моделью, очень требовательной к ресурсам.

3. SAX-парсер

SAX (Simple API for XML) базируется на модели последовательной односторонней обработки и не создает внутренних деревьев. При прохождении по XML вызывает соответствующие методы у классов, реализующих интерфейсы, предоставляемые SAX-парсером.

SAX-разбор происходит асинхронно, то есть программа не должна ждать завершающего тега для отработки уже полученных. Последнее может пригодиться, например, для отображения записей SQL-запроса еще до того, как все они будут получены. Другое применение - обрыв сеанса, допустим при нахождении одной нужной записи из миллиона.

```

@Override
public void characters(char[] ch, int start, int length) throws SAXException {
    if (thisElement.equals("purchaseNumber")) {
        notificic.setPurchaseNumber(new String(ch, start, length))
    }
    //набор условий
    ...
}

```

Рисунок 2. Условие извлечения тега в SAX

В первую очередь обрабатывается событие startDocument. Когда синтаксический анализатор SAX разбирает XML и встречает запуск тега (например, <something>), он запускает событие tagStarted (фактическое название события может отличаться). Аналогично, когда конец тега встречается во время разбора (</something>), он запускает событие tagEnded. Использование анализатора SAX подразумевает, что вам необходимо обрабатывать эти события и понимать данные, возвращаемые с каждым событием. Если в элементе есть содержимое, будут вызываться такие события, как characters для дополнительного текста, startElement и endElement для дочерних элементов и т.п. Заканчивается работа парсера событием endDocument.

SAX и DOM подходы иногда сочетают между собой. Так, веб-браузер отображает элементы в процессе получения методом SAX, но после получения документа строит его DOM-модель для DHTML-доступа в терминах иерархии объектов. [5]

Недостаток SAX - необходимость хранения состояния в процессе разбора XML-потока, то есть в случае со сложной и/или недетерминированной структурой придется частично реконструировать узловую модель для отслеживания уровней вложения.

Средства парсинга с потоковой обработкой применимы в задачах, где повторное обращение не нужно. В таком случае происходит последовательный перебор узлов до нужного и поочередная загрузка в память только текущего узла. Данные средства могут анализировать очень большие документы и подходят для таких задач, как индексация или преобразование в другие форматы (например, замена дескрипторов XML на дескрипторы HTML). [4]

SAX-парсер реализует интерфейс DefaultHandler, который использует функции обратного вызова, для извлечения данных по набору условий вида:

4. Сравнение методов, экспериментальные исследования

В рамках работы проведены исследования реализации методов синтаксического анализа информации, а также влияния на время выполнения парсинга количества документов в контрольной выборке и набор извлекаемых тегов.

Для сравнения времени, затрачиваемого на извлечение и обработку информации из XML-файлов с ftp-сервера zakupki.gov.ru был выгружен и размещен на локальном компьютере контрольная выборка документов, чтобы минимизировать влияние на время обработки файлов факторов, не относящихся к теме исследования. В качестве средства реализации был выбран язык Java, на котором были написаны классы, реализующие описанные ранее методы обработки слабоструктурированной информации, а также классы сущностей Notification с различными наборами атрибутов, для параллельного исследованию времени обработки различного

количества файлов, исследования влияния количества извлекаемых тегов на время выполнения обработки файлов.

Эксперименты проводились для контрольных выборок документов размера $N = 1000$, $N = 5000$, $N = 10000$. Такие размеры были выбраны для сравнения полученных результатов с целью выявления зависимости между числом обрабатываемых документов и общим временем их обработки, и дальнейшего прогнозирования времени парсинга фиксированного набора документов.

Набор тегов, прописанных в условиях парсера, по которым производился поиск данных также варьировался от 4 до 16. Для обнаружения корреляции между временем выполнения парсинга файлов и количеством извлекаемой информации.

И в случае работы SAX-парсера, и в случае работы DOM-парсера, набор тегов передается конструктору объекта Notification для последующей записи объекта в репозиторий.

Полученные значения времени извлечения информации при использовании SAX-парсера отражены в таблице 1, при использовании DOM – в таблице 2.

Таблица 1.

Зависимость времени выполнения парсинга XML- файлов методом SAX от количества файлов в выборке и набора извлекаемых тегов.

Количество файлов	Число извлекаемых тегов	Время выполнения преобразования, мс					
		1	2	3	4	5	среднее
1000	4	4083	3615	3933	4083	4480	4038,8
1000	8	4924	4606	5055	4232	4925	4748,4
1000	16	4020	5144	5117	4624	5445	4870
5000	4	8214	9298	9268	9296	8417	8898,6
5000	8	9266	9658	9528	9733	9775	9592
5000	16	13822	14204	14122	14574	14301	14204,6
10000	4	12887	12983	13428	12826	13021	13029
10000	8	14140	18152	13285	14274	13492	14668,6
10000	16	14699	15397	19319	16685	14688	16157,6

Таблица 2.

Зависимость времени выполнения парсинга XML- файлов методом DOM от количества файлов в выборке и набора извлекаемых тегов.

Количество файлов	Число извлекаемых тегов	Время выполнения преобразования, мс					
		1	2	3	4	5	среднее
1000	4	5416	4995	6167	5996	4764	5467,6
1000	8	6177	5419	5931	5829	6295	5930,2
1000	16	6653	5075	7175	6176	6195	6254,8
5000	4	12468	12816	13952	13684	12746	13133,2
5000	8	14678	13574	15488	15584	15406	14946
5000	16	20476	20862	20429	21064	20274	20621
100000	4	18294	20536	17833	17962	18015	18528
100000	8	20402	20107	20259	21359	19793	20384
100000	16	25478	27485	22263	22557	21995	23955,6

Следует отметить, что на время выполнения обработки существенное влияние оказывает набор извлекаемой информации. В случае использования метода SAX, и в случае использования метода

DOM добавление условий для извлечения дополнительных наборов тегов значительно влияет на время обработки файлов. На рисунке 3 представлены диаграммы времени обработки контрольных наборов файлов методами DOM и SAX.

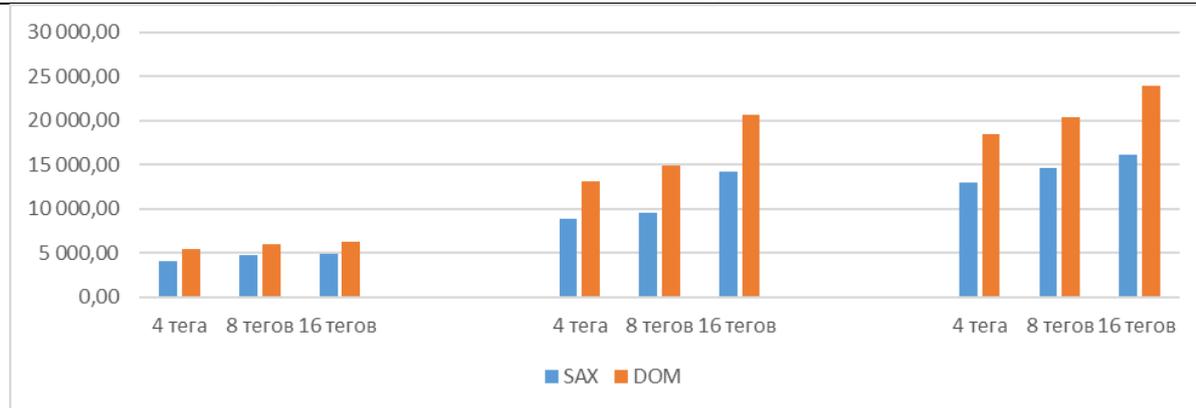


Рисунок 3. Диаграмма времени обработки контрольных выборок документов методом DOM и SAX при различном наборе извлекаемых тегов (на вертикальной оси показано время в миллисекундах, на горизонтальной три группы столбцов для выборок размером $N=1000, 5000, 10000$ соответственно)

Использование метода SAX позволяет в среднем до 1,5 раз уменьшить время, затрачиваемое на обработку XML-файлов с целью извлечения данных по сравнению с аналогичными операциями, производимыми над тем же набором файлов, но при использовании метода DOM.

В случае SAX-парсера увеличение количества тегов в 4 раза дало прирост времени обработки файлов в 1,33 раза.

4. Заключение

В результате данной работы было выявлено, что для целей извлечения данных из XML-документов рационально использовать метод SAX, поскольку в общем случае время, затрачиваемое на обработку файла методом DOM может превышать в 1,5 раза время обработки файла методом SAX для получения содержимого аналогичного набора тегов.

Стоит учитывать, что метод SAX подходит только для извлечения информации, и в случае необходимости модификации данных неприменим, в отличие от DOM. Однако в случае решения задачи получения данных, этой особенностью можно пренебречь.

На основании полученных данных с ftp возможно проводить дальнейшие исследования, позволяющие формировать рекомендации для поставщиков и заказчиков. Например, выявление оптимального расположения оптовых баз, или оптимальной начальной цены контракта для обеспечения конкуренции.

Литература

- [1] Бретт Маклахлин. Java и XML, 2-е издание, Символ-Плюс, 2016. – 544 страницы.
- [2] Интеграция XML данных — другой путь // [habrahabr.ru] –2017 – URL: <https://habr.com/ru/post/325186/>
- [3] Выгрузка условий конкурсов с zakupki.gov.ru // [habrahabr.ru] –2015 – URL: <https://habr.com/post/253201/>
- [4] Чеботарев, А. XML: свобода, ограниченная только фантазией // Компьютеры+Программы. - 2003. - № 5. - С. 52-55
- [5] Лыгина, Н.И., Пудич, А.С.. Исследование правильности и эффективности средств парсинга информации на веб-ресурсах // Инновационная наука, №. 3-1, 2017, С. 59-67.

*Mammadova F.M.,
Huseynova M.A.*

Azerbaijan State Oil and Industry University

USE OF OIL CHEMISTRY PRODUCTION WASTES BY TREATMENT OF WATER AND SOIL FROM OIL PRODUCTS

For determination of the efficiency of the oil biosorbent, received on base of carbonizate – waste of pyrolysis of excess sludge of oil chemical enterprise and also on base of hydrocarbon-oxidizing microorganisms, separated from oil – contaminated soil, the experimental researchs were carried out.

It have been determined that by comparison with carbonizate, use of biosorbent didn't allow to increase efficiency of water treatment. The experimental research by bioremediation of the oil-contaminated soil shown that efficiency of soil treatment by help of the received biosorbent in 1,6 times higher by comparison with use of carbonizate and in 1,7 times higher by comparison with traditioval method treatment.

Key words: biosorbent, biological treatment of waste water, bioremediation of the oil-contaminated soil.

During the extraction, transportation and processing of oil there are emergencies and technological losses arise, as a result of which the environment and

first of all, the hydro- and lithosphere are polluted. Annual losses from produced oil range from 2 to 5% [1].

A promising direction for the purification of oil is a biotechnological method using biosorbents.

Biosorbent - is carrier with microorganisms, immobilized on the surface, used for purification organic compounds [2,3].

Currently, there are a large number of biosorbents based on natural (peat, perlite, expanded clay) and artificial (polypropylene, polyurethane, etc.) materials, differing in the method of production as well as cultures of microorganisms, immobilized on its surface.

Industrial waste may be used as carriers that will be economically profitable to use, environmentally safe and technologically acceptable to obtain. Expansion the base of secondary materials for production of biosorbents will allow to use the resource potential of waste to obtain new materials with specified properties used in environmental technologies and to minimize the negative impact of waste on the environment.

In the system of thermal neutralization of the excess activated sludge a macroporous material-carbonizate is formed. Placing carbonizate in the environment is inefficient and does not solve the problem of reducing the volume of waste. Using it as a carrier for microorganisms with the purpose of obtaining oil biosorbent will allow solving several ecological problems at once [2].

On the basis of previous research optimal conditions for obtaining by the biosorbent by the adsorption method were determined on base of carbonizate and microorganisms-oil degraders, separated from oil-contaminated soil: dry cell biomass of microorganisms in suspension – no less than 1 g/l, immobilization time no less than 2 hours.

As a result of experimental laboratory research samples of the biosorbent were obtained with immobilized on it surface microorganisms-oil degraders with the following parameters: amount of fixed mass-60±7,2%; amount of immobilized cells of microorganisms-41±2,9%; amount of immobilized cells of microorganisms per 1 gram carrier – (2,5=0,4)·10⁷ cells 1 gram.

The purpose of the work is to assess the effectiveness of the biosorbent, obtained on base of carbonizate, in the purification of soil and water from hydrocarbons. For conducting of experimental research by purification of water, activated sludge samples were taken from the aerotank refinery named after G.Aliyev. Sampling was carried out according to the “Method of measuring the mass concentration of activated sludge”.

Hydrochemical and hydrobiological indices of activated sludge were measured by methodical manual by hydrobiological and bacteriological control of the biological treatment process at the plants with aerotanks. Determination of oil products in water was carried out by the method of IR-spectroscopy and the concentration of oil products in water was calculated by the formula:

$$C = \frac{C_1 \cdot V_1 \cdot K}{V_2}$$

Where C₁- is content of oil products in eluate;
V₁- is volume of eluate, dm³;

V₂ - is volume of water sample taken for determination, dm³;

K-is coefficient of diluted eluate.

For conducted of experimental research by soil treatment samples of the oil-contaminated soils were taken from technological bioremediation site. Sampling selection was realized from surface layer up to depth 0,3m by method of “envelope” (mixed sample on area 20-25m²). Determination of oil products in soil carried out by method of the IR-spectroscopy. Concentration of oil products in soil (X, mg/kg) was calculated by formula:

$$X = \frac{C_1 \cdot V \cdot V_2 \cdot V_{eluate}}{M \cdot V_2 \cdot V_{al}}$$

Where C₁- is device readings mg/dm³;

M-is sample weight for analysis, kg;

V-is total extract volume, dm³;

V₁- is volume of the extract taken for dilution, dm³;

V₂-is volume of the extract, received after dilution, dm³;

V_{al}- is aliquot volume of the extract, entered into the chromatographic column, dm³;

V_{el}- is the volume of the eluate obtained after passing the extract through the column, dm³.

Soil moisture was determined by drying of the soil sample up to the present mass by temperature 105±5°C and determination the difference in the mass of the soil before and after drying.

pH reaction was determined in a waster suspension of the soil using pH meter.

Microbiological control was realized by the following indices: the number of hydrocarbon –oxidizing microorganisms microscopic fungi and bacteria of the Azotobacter genus, using the method of planting on various elective nutrient media widely used in practice. Represented groups of microorganisms play a major role by treatment from petroleum hydrocarbons.

Statistical processing of the data was realized with Excel 2007 program, by calculating the average arithmetic and standard error of the mean.

Significance of difference between averages was evaluated using a Student's t-criterion for a significance level α=0,05.

To determine the effectiveness of the obtained biosorbent based on carbonizate and hydrocarbon oxidizing microorganisms a series of experimental research's on the treatment of water and soil from oil products was carried out. For the biological treatment experiment the oil- contaminated waste water was used with content of oil products 150 mg/dm³, supplied at the biological plants of refinery.

Treatment of the oil-contaminated waste water was realized in the laboratory aerotank by help of activated sludge, corresponding for use by hydrobiological and hydrochemical indices: cotton setting speed-fast; color-dark-brown, odour – marsh, water over settled sludge-transparent, sludge index 106,6±5 g/ml.

In activated sludge hydrobionts have been identified that are indicators of good work of the treatment plants, namely: Tokophzya, Lemnazum, Lecane (Monostyle) decipiens, Arcelladis Coides, Arcella Vulgaris

Arthrotardigrade, Vorticella Companula Aclosoma tenbrarum, etc.

As control used the results of experiments on water treatment: by traditional method without addition of sorbents and biosorbents and also by use of carbonizate.

Control of the process of water treatment during the experiment was carried out according to the physiochemical (content of oil products, pH) and hydrobiological indices of activated sludge (smell, color, mudiness, settling speed of activated sludge microorganisms). Efficiency of water treatment was estimated after 8 and 24 hours of the beginning of experiment.

According to the results of research in all the investigated variants, the visual state of the activated

sludge was within the normal range. But with microscopy of sludge after 8 hours there was deterioration of the biocenosis: hydrobionts activity decreased, protozoa cysts appeared, species diversity has decreased. After 24 hours of biological treatment noted an increase in activity, number and species diversity, which indicates a relatively stable biocenosis of activated sludge which is restored naturally and in a fairly short time.

No significant changes in the state of hydrobionts sludge were observed during the microscopy of sludge using carbonizate and biosorbent.

Results of experiments by biological treatment of waste water by help of biosorbent presented in the table 1.

Table 1.

Results of experiments research by biological treatment of waste water

Variants	Initial content of oil products, mg/dm	Residual content of oil products mg/dm		Treatment efficiency, %	
		8 hours	24 hours	8 hours	24 hours
1)Traditional method	150±21,9	125,8±17,6	65±9,1	19,5	58,1
2) Use of carbonizate		71,2±7,2	59,2±5,5	54,4	62,1
3)Use of biosorbent		72,2±10,1	54,6±7,6	53,8	65,1

As can be seen from table 1, treatment efficiency of waste water from oil products after 8 hours made up 53,8% in variant 3 and 54,4% - in variant 2, which is more efficient than the way of traditional treatment method in 2,3 times.

An increase in treatment time up to 24 hour did not significantly improve the treatment efficiency in variant 2 (use of carbonizate) and in variant 3 (use of biosorbent). By traditional treatment method (variant 1) efficiency after 24 hours is increased in 3 times, which can be explained by the fact that the microscopy of activated sludge require more time for processing of organic substances, which is confirmed by microscopy research data. The use of carboizate and biosorbent will not allow to increase the treatment time up to 24 hours, but to carry out treatment in aeration tank for 8 hours.

Treatment efficiency by help of biosorbent (variant 3) is insufficient compared to the control variant 2, which can be explained by necessity immobilization, of the most effective microorganism used for oil pollution elimination.

To increase the efficiency of the received biosorbent is recommended: to select the optimal consortium of microorganism-oil biodestructors, using oil as feeding source and also provide maximum fixation of microorganisms in the pores of the carrier. Formation of the microbiocenosis on the surface of the material depends on the nature of carrier and microorganisms, the degree of hydrophilicity of the surface of the material and living cell, charge of the living cell surface and

carrier, correlation of size of microorganisms cells and pores of carrier and many other factors.

To determine the effectiveness of the obtained biosorbent in bioremediation technology a series of soil treatment experiments were conducted, containing 40±5 g/kg of oil products, selected from technological areas of bioremediation.

Experimental research by bioremediation of the oil-contaminated soils were conducted in laboratory conditions in containers by volume 5,0dm³ during 3 months. In the course of the research maintained constant conditions: air temperature 20±2°C; pH of medium 6-7; natural lighting; substrate humidity 60±5%.

As control used the results of experiments by soil treatment: by traditional method with addition of structure-sawdust (variant 1) and also by use of carbonizate (variant 20).

Justification for selection of components correlations of the studied substrates were existing technological parameters of bioremediation process in climatic conditions of Azerbaijan (variant 1); literary data by use of biosorbent and also experimental data (variants 2,3). Control of the treatment of the oil-contaminated soil during experiment was conducted by physiochemical parameters (content of oil products, humidity and pH). Effectiveness of soil treatment was evaluated over 1,5 and 3 months since the beginning of the experiment. Results of experimental research by soil treatment by help of the received biosorbent on base of carbonizate presented in the table 2.

Results of experiments research by soil treatment

Variants of treatment method of the oil-contaminated soil	Initial content of the oil products, g/kg	Residual content of oil products g/kg		Effectiveness treatment, %	
		1,5 hours	3 hours	1,5 hours	3 hours
1) Traditional method	10±5	34±0,2	2,58±0,1	14,8	35,5
2) Use of carbonizate		34±0,3	2,58±0,2	13,8	37,3
3) Use of biosorbent		28,6±0,2	16,3±0,1	28,5	59,3

As shown the data of the table 2, the effectiveness of treatment soil from oil products was 59,3% in variant 3 (use of biosorbent) which in 1,6 times higher by comparison with variant 2 (use of carbonizate) and in 1,7 times higher by comparison with variant 1 (traditional method). Effectiveness of treatment by traditional method and by use of carbonizate practically no different, which allow the use of carbonizate as a structurer by bioremediation of the oil-contaminated soils.

On base of conducted research by use of the oil biosorbent was determined:

1. By conducting of wastewater biological treatment by help of biosorbent during 8 hours content of oil products in purified water is decreased up to 53,8%, which is more efficient than the traditional treatment method in 2,8 times. Increase of treatment time up to 24 hours allow significantly improve the treatment efficiency.

2. By comparison with carbonizate application of received biosorbent did not allow to increase the efficiency of water treatment which may be explained by

necessity immobilization on carrier of the most effective consortium of microorganisms used for liquidation of oil pollution.

3. Use of biosorbent by biological treatment of soil will allow to decrease content of oil products up to 59,3 % which in 1,6 times higher by comparison with use of carbonizate and in 1,7 times higher by comparison with traditional treatment method.

literature

1. Добыча нефти [Электронный ресурс] // Все о нефти: сайт. – URL: <http://vseonefti.ru/> (дата обращения: 18.06.2017).

2. Белик Е.С., Злобина К.А. Исследование возможности использования отходов производства в качестве биосорбента // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. - 2016. - № 3 (23). - С. 62-76.

3. Каменщиков Ф.А., Богомольный Е.И. Нефтяные сорбенты. - Ижевск; М.: Институт компьютерных исследований, 2003. - 268 с.

Nedashkivsky Ye. A.

postgraduate,

National Technical University of Ukraine

Kiev Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky

METHODS OF INFORMATION TECHNOLOGY OF LINGUISTIC MODELING FOR ANALYSIS AND FORECASTING OF FINANCIAL TIME SERIES

Недашківський Євген Анатолійович

аспірант,

Національний технічний університет України

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського

МЕТОДИКА ІНФОРМАЦІЙНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ЛІНГВІСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Summary: The processes of linguistic modeling in the analysis and forecasting of financial time series are investigated. As a result, proposed the method of information technology linguistic modeling for the analysis and prediction of financial time series. The result of predicting the fractal time series is displayed in a linguistic form, taking into account the trends of changes over the entire time interval. The numerical form of the forecast is determined by the individual assessment, based on the characteristics of each individual unit of the number series. On this basis, the peculiarity of an information system for analyzing and forecasting financial time series using linguistic modeling is the ability to obtain an accurate multi-level forecast of all possible types and intensities of elementary trends underlying the financial time series. The developed technique allows comparing indicators and calculating a generalized indicator of financial time series, taking into account co-dimension, scaling, systematic, proportionality and forming a general forecast level.

Анотація: Досліджені процеси лінгвістичного моделювання при аналізі та прогнозуванні фінансових часових рядів. У результаті запропоновано методику інформаційної технології лінгвістичного моделювання для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів. Результат прогнозування фрактального часового ряду виводиться у лінгвістичній формі враховуючи тенденції зміни на всьому часовому відрізьку.

Числова ж форма прогнозу визначається індивідуальною оцінкою, яка базується на характеристичі кожної окремої одиниці числового ряду. Виходячи з цього, особливість інформаційної системи для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання полягає в можливості отримання точного багаторівневого прогнозу усіх можливих типів та інтенсивностей елементарних тенденцій закладених в основу фінансових часових рядів. Розроблена методика дозволяє порівнювати показники і розраховувати узагальнений показник фінансових часових рядів з урахуванням корозмірності, масштабування, систематичності, пропорційності тощо і формуванням загального рівня прогнозу.

Key words: financial time series, linguistic modeling, information technology, fractal analysis, forecasting.

Ключові слова: фінансові часові ряди, лінгвістичне моделювання, інформаційні технології, фрактальний аналіз, прогнозування.

Постановка проблеми. Фінансові показники в економічній теорії часто розглядаються у вигляді випадкових величин [1], а більшість підходів до аналізу та прогнозування часових рядів з фрактальними властивостями, засновано на статистичних методах і моделях. Слід відмітити про актуальність і масштабність даних підходів, але вони не є достатньо точними, в силу відсутності розуміння природи мінливості ринків капіталу і механізму передбачення коливання цін. У більшості випадків, результат виникнення зовнішніх факторів здійснює вплив на динаміку часових рядів з фрактальними властивостями, тобто відбувається порушення структури, а попередні дані залишаються незмінними. Це є особливістю практично будь-якого фінансового часового ряду. Тому в умовах сучасної ринкової економіки актуальним питанням є розробка методики інформаційної технології лінгвістичного моделювання для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Виконання аналізу часових рядів [2, 3], в умовах нинішньої економічної науки, відбувається на основі розділу математичної фізики, який активно розвивається і поглинає, як методи теорії динамічних систем, так і методи фрактального аналізу [4]. Як окрема структурна одиниця, даний механізм аналізу активно застосовується в економіці для аналізу інформації у вигляді часових рядів котирувань акцій компаній. Алгоритм підходу базується на нестабільності ринку цінних паперів, що призводить до значних коливань і як наслідок, до виникнення хаотичних динамічних систем. Хаос в динамічних системах, це ніщо інше, як експонентний розкид близьких траєкторій для класу хаотичних атракторів. Рівень експоненціального розкиду характеризується старшим показником Ляпунова, а рівень «безладу» – ентропією. Наслідок знаходження будь-який з цих величин, є значенням горизонту прогнозу для аналізованого часового ряду. Так само знаходження розмірності вкладення, тобто мінімальне число динамічних змінних, які однозначно описують спостережуваний процес, можна знайти використовуючи фундаментальні аспекти теорії динамічних систем.

В силу того, що процеси коливання фінансового ринку мають динамічний характер, механізм отримання додаткової інформації несе неоціненний вклад в точність і правильність прийнятих рішень, що вкрай важливо для більшості акціонерних ком-

паній. Саме спираючись на дане судження, слід підкреслити, що методи аналізу часових рядів, які прийшли з нелінійної динаміки, мають пріоритетний вплив на коректний прогноз відносно ринку цінних паперів.

На сьогодні, формування та побудова моделей спрямованих на відображення динаміки фінансових часових рядів [5] є однією з головних проблем при аналізі та прогнозуванні часових рядів з фрактальними властивостями. Оскільки зовнішні фактори здійснюють вплив на динаміку часових рядів з фрактальними властивостями з порушенням структури і незмінністю попередніх даних, в силу присутності нелінійності використання методів типу MACD або ARIMA стає неефективним та викликає систематичні помилки у прогнозі.

Проблемам автоматизації та розробкам методики побудови системи аналізу та прогнозування часових рядів з фрактальними властивостями присвячено роботи: П.І. Бідюка, О.І. Савенкова, І.В. Баклана [5], А.К. Лопатина [6, 7], О.Ю. Берзлеву [8], А.С. Нечипоренка [9], І.А. Ликова, С.А. Мисливцева [10], А.В. Матвійчука [11], І.Г. Лук'яненка, В.М. Жука [12], G. Кооп, D. Korobilis [13], Vercellis Carlo [14], Pandit S.M., Wu, S.-M [15] та ін. Такі автори як В.Ю. Дубницький [16] та К.І. Крицун [17] надають вичерпну інформацію по складанню інформаційних матриць та методології системного аналізу в рамках досліджуваної системи.

Проведений аналіз сучасних наукових робіт показав, що досліджені розробки та досягнення не враховують існуючий і дуже важливий взаємозв'язок між аналізом часових рядів та їх подальшим прогнозуванням з урахуванням фрактальних особливостей. Тому, існує нагальна потреба в подальшому дослідженні методів, принципів та механізмів реалізації, формалізації та алгоритмізації процесу аналізу та прогнозування часових рядів з фрактальними властивостями в системі управління інформаційними технологіями економічного спектру.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Результат прогнозування фрактального часового ряду виводиться у лінгвістичній формі на всьому часовому відрізьку. Числова ж форма прогнозу визначається загальною оцінкою, а не індивідуальною, яка б базувалась на характеристичі кожної окремої одиниці числового ряду. Дане питання є невирішеним. Розробка методики дозволить отримати більш точний багаторівневий про-

гноз усіх можливих типів та інтенсивностей елементарних тенденцій закладених в основу фінансових часових рядів.

Мета статті. Метою статті є розробка методики інформаційної технології лінгвістичного моделювання для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів.

Виклад основного матеріалу. Основою методики створення інформаційної технології для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання є Model-view-controller (рис. 1) [18].

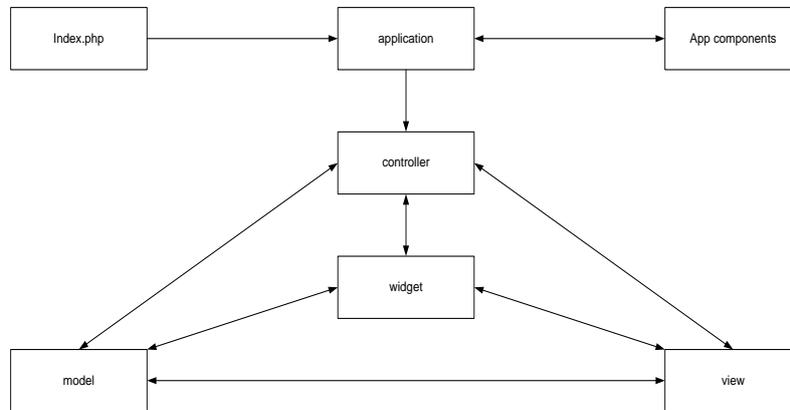


Рисунок 1. Схеми Model-view-controller

Для вирішення завдання прогнозування часового ряду з фрактальними властивостями в термінах лінгвістичного моделювання пропонується використання схеми, яка наведена на рис. 2.

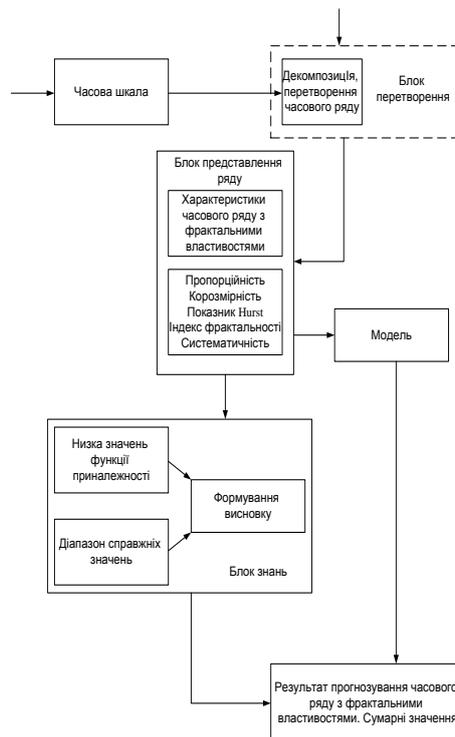


Рисунок 2.

Схеми реалізації запропонованої моделі прогнозування часового ряду з фрактальними властивостями

Попередню модель інформаційної системи для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання можна представити у вигляді функціональних схем претендентів (рис. 3).

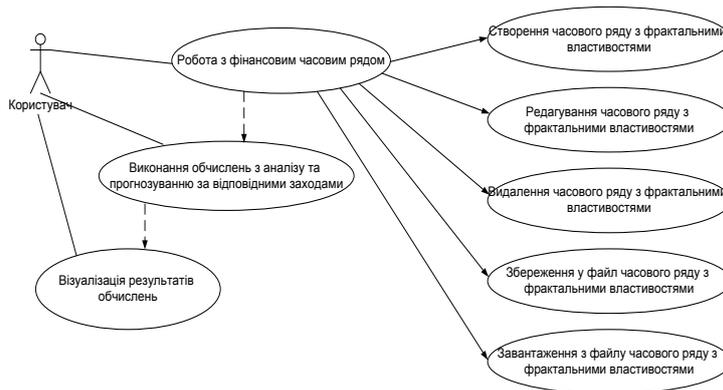


Рисунок 3. Діаграма прецедентів інформаційної системи для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання

Сутність структури системи передбачає можливість розподілу функціональних можливостей на дві бази:

- перша база має на меті формування часового ряду з фрактальними властивостями та представлення загальної моделі ряду (рис. 4)
- друга база ґрунтується на математичній складовій, виконуючи всі необхідні обчислення (рис. 5).

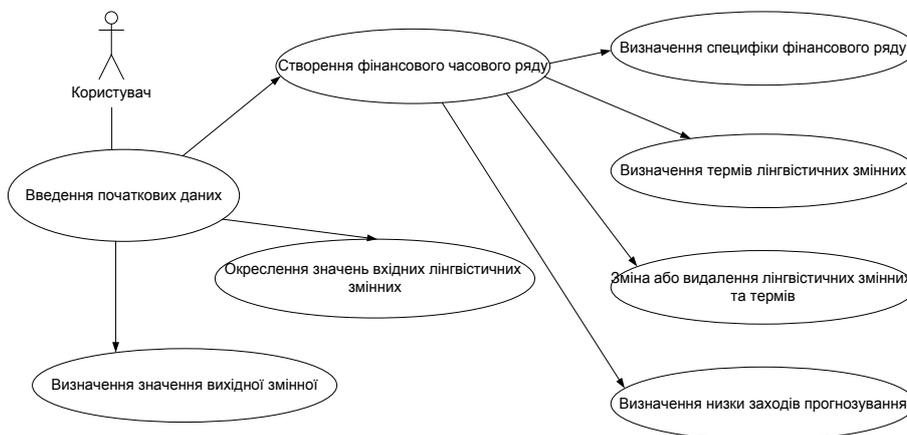


Рисунок 4. Діаграма формування часового ряду з фрактальними властивостями та представлення загальної моделі ряду

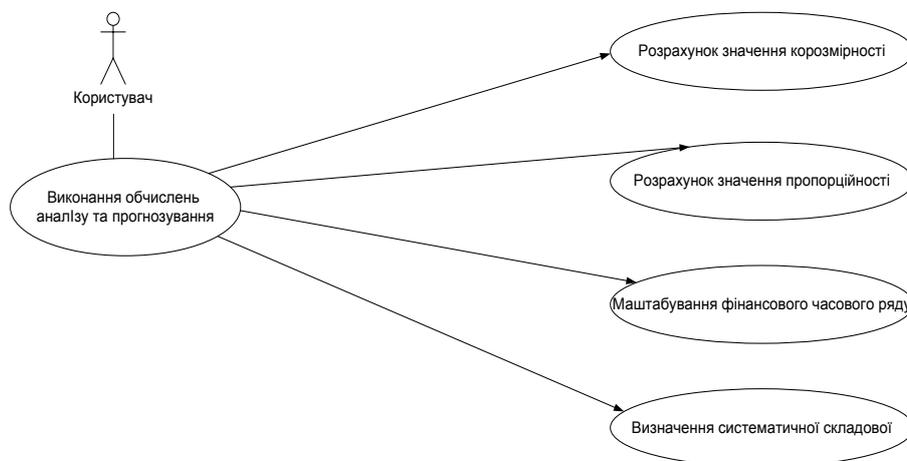


Рисунок 5. Діаграма принципів проведення математичних обчислень та формування результату прогнозу

Механізм виведення прогнозних значень базується на визначенні моделі вхідного ряду. У разі визначення структури фрактального часового ряду результат прогнозування виводиться у лінгвістичній формі враховуючи тенденції зміни на всьому часовому відрізку. Числова ж форма прогнозу визначається індивідуальною оцінкою яка базується на характеристиці кожної окремої одиниці числового ряду. Виходячи з цього, особливість інформаційної системи для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання полягає в можливості отримання точного багаторівневого прогнозу усіх можливих типів та інтенсивностей елементарних тенденцій закладених в основу фінансових часових рядів.

Рівень «порізаності» часового ряду визначає фрактальна розмірність, з цього виходить, що фрактальну розмірність 1, рівну її евклідовій розмірності повинна мати пряма лінія. Часовий ряд цін на

активи є зазубрену лінію. Вона не одномірна, так як не є прямою, в той же час вона і не двомірна, так як не заповнює площину. Таким чином, розмірність фінансового ряду знаходиться між одиницею і двоїцею. Згідно з очікуваннями фрактальна розмірність випадкового часового ряду становить 1,5.

Для вирішення проблеми адаптивного підходу в автоматизованій системі аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання використовуємо модель синтезу часового ряду з фрактальними властивостями. Виходячи із задач організації аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання, прогноз планується на період, тривалість якого визначається часом прогнозу T_{Π} (рис. 6) і кількістю засобів – S_{Π} визначених для проведення прогнозу [19].

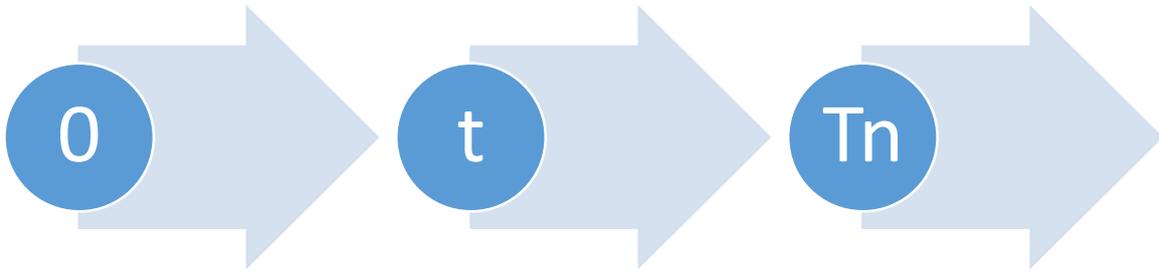


Рисунок 6. Період планування прогнозу

Виходячи з того, що прогнозування часових рядів з фрактальними властивостями включає в себе кілька послідовних процесів загальний рівень прогнозу H^{Π} повинен знаходитися в діапазоні між мінімальним і максимальним значенням (рис. 7).

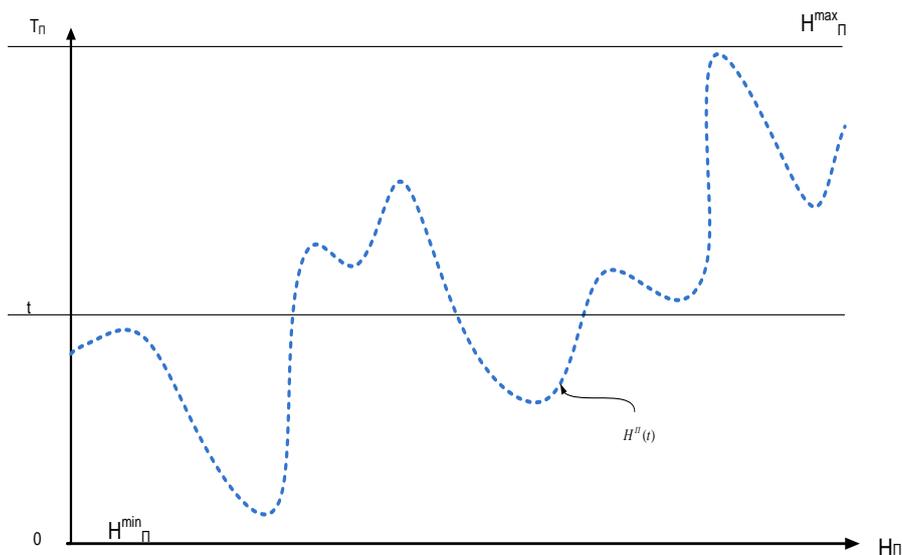


Рисунок 7. Функція розподілу рівня прогнозу H^{Π} часових рядів з фрактальними властивостями від часу

Для періоду T^{Π} характерним є проведення всього спектру маніпуляцій, таких як виділення корозмірності, масштабування часового ряду, формування статичного ряду, тощо. Для кращого аналізу кожен із заходів розподілений на модулі, покликані сформувати певний рівень прогнозу.

Будь-який захід M_i належить множині:

$$M_i \in \{M\}, i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

де $\{M\}$ множина, яка складається з усіх можливих для заходів прогнозу.

Характеристиками кожного з окремих заходів прогнозу M_i за певний час проведення $t_{M_i}^{\Pi}$ є наступні:

- корозмірність $K_{M_i} \in K, i = \overline{1, m}$;
- пропорційність $P_{M_i} \in P, i = \overline{1, m}$;
- систематичність $S_{M_i} \in S, i = \overline{1, m}$;
- залишок Z_M .

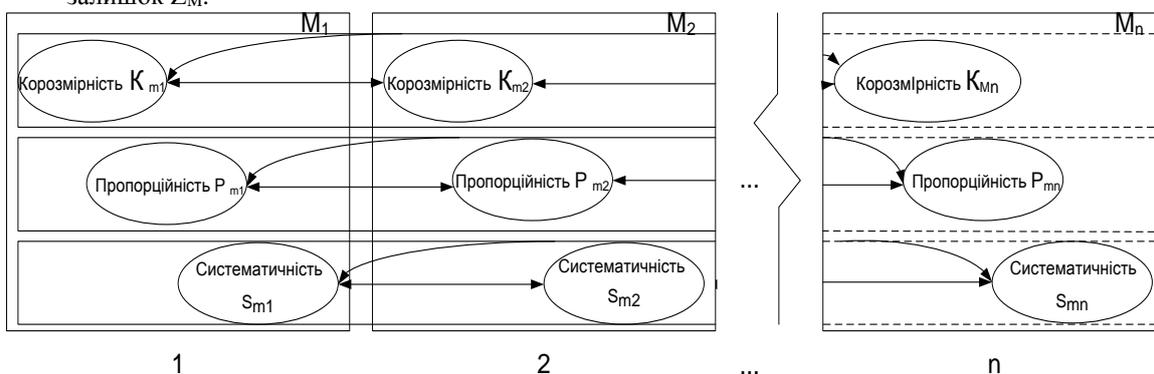


Рисунок 8. Механізм злиття кожної з компонент $K_{M_i}, P_{M_i}, S_{M_i}$ з наступною та передуючою, за умови, що $i > 1$

У разі комплексного прогнозу часових рядів з фрактальними властивостями, спостерігається злиття кожного з компонент $K_{M_i}, P_{M_i}, S_{M_i}$ з наступним та передуючим, за умови, що $i > 1$. Описаний процес трансформується у залежність $H_{M_i}^{\Pi}$ відповідно до значень $K_{M_i/M}, P_{M_i/M}, S_{M_i/M}$.

З урахуванням цих факторів, (2) прийме вигляд:

$$H_{M_i/M}^{\Pi} = f(K_{M_i/M}, P_{M_i/M}, S_{M_i/M}) \quad (3)$$

Щоб урахувати всі розглянуті взаємозв'язки між заходами M_i , що мають місце при прогнозуванні часових рядів з фрактальними властивостями, необхідно представити їх графічно, для цього побудуємо матрицю суміжності коефіцієнтів взаємного впливу $B \in [0, 1]$ за кожною з компонент попередньо розрахованих коефіцієнтів взаємного впливу $B_{Z_{M_i}}, B_{N_{M_i}}, B_{U_{M_i}}$ елементів прогнозу M_i :

$$B_K = \begin{bmatrix} B_{K_{M_{1,1}}} & K & B_{K_{M_{1,m}}} \\ M & O & M \\ B_{K_{M_{m,1}}} & L & B_{K_{M_{m,m}}} \end{bmatrix}, B_P = \begin{bmatrix} B_{P_{M_{1,1}}} & K & B_{P_{M_{1,m}}} \\ M & O & M \\ B_{P_{M_{m,1}}} & L & B_{P_{M_{m,m}}} \end{bmatrix}, B_S = \begin{bmatrix} B_{S_{M_{1,1}}} & K & B_{S_{M_{1,m}}} \\ M & O & M \\ B_{S_{M_{m,1}}} & L & B_{S_{M_{m,m}}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Зазначені матриці у своєму складі мають повний перелік аналізу всіх компонент прогнозу. Вони є квадратними з розмірністю $m \times m$.

Отже, враховуючи показники інформаційної бази, складеної на основі попередньо проведених заходів прогнозуванні часових рядів з фрактальними властивостями з множини M та приймаючи до уваги дію матриць суміжності коефіцієнтів взаємного впливу, які формує кожен захід прогнозу M_i , запишемо:

Загальна формула обчислення рівня прогнозу $H_{M_i}^{\Pi}$, згідно наведеного графічного представлення, має наступний вигляд:

$$H_{M_i}^{\Pi} = f(K_{M_i}, P_{M_i}, S_{M_i}) \quad (2)$$

Будь-який захід M_i створює інформаційну базу з певним коефіцієнтом K (за кожною з компонент $K_{M_i}, P_{M_i}, S_{M_i}$), яка є інформаційним полем для інших заходів прогнозу. Отже на прогноз часових рядів з фрактальними властивостями $K_{M_i}, P_{M_i}, S_{M_i}$, щодо кожного із заходів M_i з одного боку, безпосередньо впливають інші, передуючі заходи, а з іншого, здійснюють вплив на рівень прогнозу часових рядів з фрактальними властивостями, що формуються $K_{M_i}, P_{M_i}, S_{M_i}$ на наступних етапах заходів (рис. 8).

$$K_{M_i/M} = K_{M_i} + \sum_{j=1}^m K_{M_j} B_{K_{M_j}} \quad (5)$$

$$P_{M_i/M} = P_{M_i} + \sum_{j=1}^m P_{M_j} B_{P_{M_j}} \quad (6)$$

$$S_{M_i/M} = S_{M_i} + \sum_{j=1}^m S_{M_j} B_{S_{M_j}} \quad (7)$$

З урахуванням визначення окремих коефіцієнтів відповідно до матриць суміжності, попередній вираз запишемо як:

$$Q_{M_i/M}^{\Pi} = f \left(K_{M_i} + \sum_{j=1}^m K_{M_j} B_{K_{M_j}}, P_{M_i} + \sum_{j=1}^m P_{M_j} B_{P_{M_j}}, S_{M_i} + \sum_{j=1}^m S_{M_j} B_{S_{M_j}} \right) \quad (8)$$

Використовуючи вирази 5-8 можна визначити рівень прогнозування часових рядів з фрактальними властивостями $Q_{M_i/M}^{\Pi}$ з урахуванням інформаційної бази, отриманої від проведених раніше заходів прогнозу з множини M для будь-якого заходу M_i при плануванні процесу прогнозування.

Висновки та пропозиції. У роботі запропоновано методику інформаційної технології лінгвістичного моделювання для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів. Результат прогнозування фрактального часового ряду виводиться у лінгвістичній формі враховуючи тенденції зміни на всьому часовому відрізку. Числова ж форма прогнозу визначається індивідуальною оцінкою, яка базується на характеристичі кожної окремої одиниці числового ряду. Виходячи з цього, особливості інформаційної системи для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів за допомогою лінгвістичного моделювання полягає в можливості отримання точного багаторівневого прогнозу усіх можливих типів та інтенсивностей елементарних тенденцій закладених в основу фінансових часових рядів. Розроблена методика інформаційної технології лінгвістичного моделювання для аналізу та прогнозування фінансових часових рядів дозволяє порівнювати показники і розраховувати узагальнений показник. Для кращого аналізу кожен показник (корозмірність, масштабування часового ряду, систематичність, пропорційність, тощо) формує загальний рівень прогнозу. Запропонована методика дозволяє адаптувати процес планування прогнозу фінансових часових рядів до зміни завдань та рівня сформованості початкового ряду. Надалі, необхідно виконати експериментальні дослідження з аналізу та прогнозування фінансових часових рядів на основі запропонованої методики інформаційної технології лінгвістичного моделювання.

Список літератури:

1. Видмант О.С. Прогнозирование финансовых временных рядов с использованием рекуррентных нейронных сетей LSTM // Общество: политика, экономика, право, 2018. – № 5. – С.63-66.
2. Шапошнікова І.О. Аналіз часових рядів первинного ринку житлової нерухомості м. Києва // Економічний вісник університету, 2018. – Випуск № 36/1. – С. 140-147.

3. Трофименко І.В. Модель прогнозування показника надійності суднових агрегатів // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2018. – № 1(55). – С. 140-145.

4. Гардер С.С., Корніль Т.Л. Фрактальний аналіз та прогнозування тенденції фінансового часового ряду // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2018. – № 3 (1279). – С. 37-40.

5. Бідюк П.І., Савенков О.І., Баклан І.В. Часові ряди: моделювання і прогнозування: монографія. – К.: ЕКМО, 2003. – 144 с

6. Лопатин А.К., Черненко О.Б. Системный анализ экономических циклов Украины, России, Германии, США на фоне мирового финансового кризиса 2007 – 2009 г.г. (статистические аспекты) // Искусственный интеллект. – 2010. – № 3. – С. 494-500.

7. Лопатин А.К., Черненко О.Б. Статистические свойства финансового рынка Украины // Актуальные проблемы экономики. – 2006. – № 10 (64). – С. 136-149.

8. Берзлев О.Ю. Сучасний стан інформаційних систем прогнозування часових рядів // Управління розвитком складних систем. – 2013. – №1. – С. 78-82.

9. Нечипоренко А.С. Моделі, методи та інформаційні технології раннього виявлення розладнань в нестационарних квазіперіодичних процесах: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.06 "Інформаційні технології", Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків, 2018. – 39 с.

10. Лыков И.А., Охотников С.А. Влияние изменения функции Херста на возможности экономического прогнозирования // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10. – С. 1539-1544.

11. Матвійчук А.В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка: монографія. – К.: КНЕУ, 2011. – 439 с.

12. Лук'яненко І.Г., Жук В.М. Аналіз часових рядів. Побудова Var і Vest моделей з використанням пакета E.Views 6.0. – К.: НУКМА, 2013. – 176 с.

13. Koop G., Korobilis D. Bayesian Multivariate Time Series Methods for Empirical Macroeconomics. – Now Publishers Inc, 2010. – 94 p.

14. Vercellis Carlo. Business intelligence: data mining and optimization for decision making. – John Wiley & Sons, Ltd., Publication, 2009. – 417 p.

15. Pandit S.M., Wu, S.-M. Time series and system analysis with applications. – New York: Wiley, 1983. – 586 p.

16. Дубницький В.Ю. Вибір методу прогнозування вартості цінних паперів з урахуванням фрактальної вимірності ряду спостережень // Бізнес Інформ: наук. журнал. – Харків: ХНЕУ, 2011. – № 7(1). – С. 120–121.

17. Крицун К.І. Мультифрактальний аналіз динаміки фондових індексів України: ПФТС ТА UX // Ефективна економіка. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: http://www.economy.nayka.com.ua/pdf/2_2016/38.pdf

18. Model-view-controller Матеріал із Вікіпедії — свободної енциклопедії <https://ru.wikipedia.org/wiki/Model-View-Controller>

19. Schertzer D, Lovejoy S, Schmitt F, Chigirinskaya Y, Marsan D. 1997. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. Fractals 5: 427-471.

Узенгер Алексей Андреевич,

к.т.н., ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

ПОЛУЧЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ СИГНАЛОВ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

Аннотация: В статье рассматривается вопрос получения квадратурных сигналов в измерительных системах при помощи преобразования Гильберта и обработка квадратурных сигналов. Предполагается что преобразование Гильберта будет работать в устройствах с ограниченным вычислительным ресурсом.

Abstract: The article discusses the issue of obtaining quadrature signals in measuring systems using the Hilbert transform and processing quadrature signals. It is assumed that the Hilbert transform will work in devices with limited computing resources.

Ключевые слова: квадратурные сигналы, преобразование Гильберта, АЦП, КИХ-фильтр, ФНЧ.

Keywords: quadrature signals, Hilbert transform, ADC, FIR filter, low-pass filter.

Введение

При регистрации внешних аналоговых сигналов на выходе аналого-цифрового преобразователя (АЦП) инженер получает ряд квантованных действительных значений, характеризующих измеряемую величину. В ряде задач цифровой обработки сигналов, например БПФ, удобнее от действительной формы представления сигнала перейти к комплексной (квадратурной) форме представления. «Квадратурный сигнал – это двумерный сигнал, значение которого в некоторый момент времени может быть задано одним комплексным числом (c), содержащим две части, которые называют действительной (a) и мнимой (b) частью (синфазной и квадратурной составляющей)» [1, с. 494].

$$c = a + jb = Ae^{j\varphi} \quad (1)$$

где A - модуль (абсолютная величина) c . φ – аргумент числа c . c – комплексное число; a , b , A , φ – действительные числа.

Способ перехода от действительного сигнала к комплексному имеет вид:

$$y(t) = x(t)e^{-j\omega_0 t} = x(t)\cos(\omega_0 t) - jx(t)\sin(\omega_0 t).$$

В выражении $x(t)$ – входной действительный сигнал. $y(t)$ – выходной квадратурный сигнал. Умножение действительного сигнала на комплексную экспоненту $e^{-j\omega_0 t}$ называют комплексным понижающим преобразованием. Как следствие данного преобразования, часть спектра полезного сигнала переместится в область отрицательных частот на величину ω_0 .

Рассматривая задачу в контексте цифровых измерительных систем, блок-схема квадратурного преобразования действительного сигнала с последующей дискретизацией представлена на рис. 1а, и альтернативный метод – дискретизация действительного сигнала с последующим преобразованием в квадратурный вид на рис. 1б.

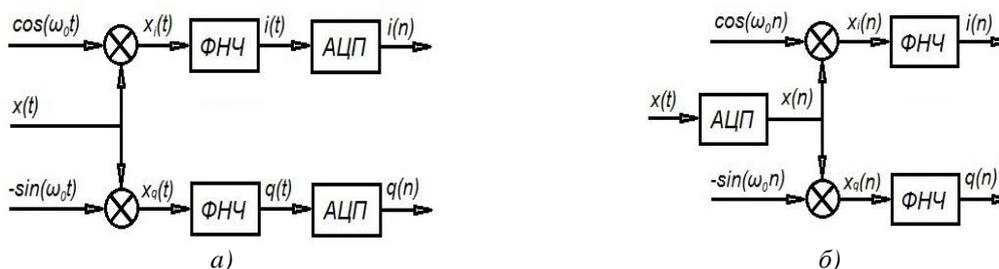


Рис. 1 Блок-схемы квадратурной дискретизации действительного сигнала

Схема квадратурной дискретизации, представленная на рис. 1а, имеет следующие достоинства: - каждый АЦП работает на частоте, равной половине частоты, необходимой при обычной дискретизации действительных сигналов; - при заданной частоте дискретизации можно обрабатывать более широкополосные сигналы. Одним из вариантов технического решения данной блок-схемы – применение микросхем IQ – демодуляторов, на выходе которой комплексный сигнал в виде IQ – данных.

Достоинство схемы (рис. 1б) в том, что переход от действительного сигнала к квадратурному виду осуществляется доработкой программного обеспечения вычислителя, а именно введение в код обрабатывающей программы цифрового квадратурного генератора и цифрового ФНЧ.

Другой способ получения комплексного сигнала - преобразование Гильберта, которое добавляет необходимую комплексную составляющую к входному действительному сигналу, т.е. компоненту b в (1). Рассмотрим более подробно получение комплексного (аналитического) сигнала методом преобразования Гильберта в устройствах с ограниченным быстродействием.

Реализация поставленной задачи

Генерация аналитического сигнала может быть реализована как во временной, так и в частотной областях. Во временной области дискретное

преобразование Гильберта может быть реализовано в виде КИХ-фильтра. Действительная компонента аналитического сигнала формируется из вещественного входного сигнала, задержанная на $N/2$ тактов, а комплексная компонента формируется из пропущенного входного сигнала через КИХ-преобразователь (длиной N тактов). В частотной области к вещественному входному сигналу применяют N -точечное Фурье преобразование. Все компоненты спектра увеличивают в два раза. Далее спектральные составляющие отрицательных частот (компоненты от $N/2+1$ до $N-1$) обнуляют, а компоненты спектра 0 и $N/2$ уменьшают в два раза. Применяв обратное N -точечное Фурье преобразование получают аналитический сигнал.

Рассмотрим генерацию комплексного сигнала во временной области. Преобразование Гильберта можно представить в виде КИХ-фильтра с особенной импульсной характеристикой, сдвигающей фазу сигнала при неизменной амплитуде сигнала. Для получения коэффициентов данного КИХ-фильтра воспользуемся модулем *fdatool* «Filter Design Toolbox – функции анализа и синтеза фильтров, в том числе с учетом эффектов квантования и арифметики с фиксированной запятой» [2, с. 717] в математическом пакете Matlab (рис. 2).

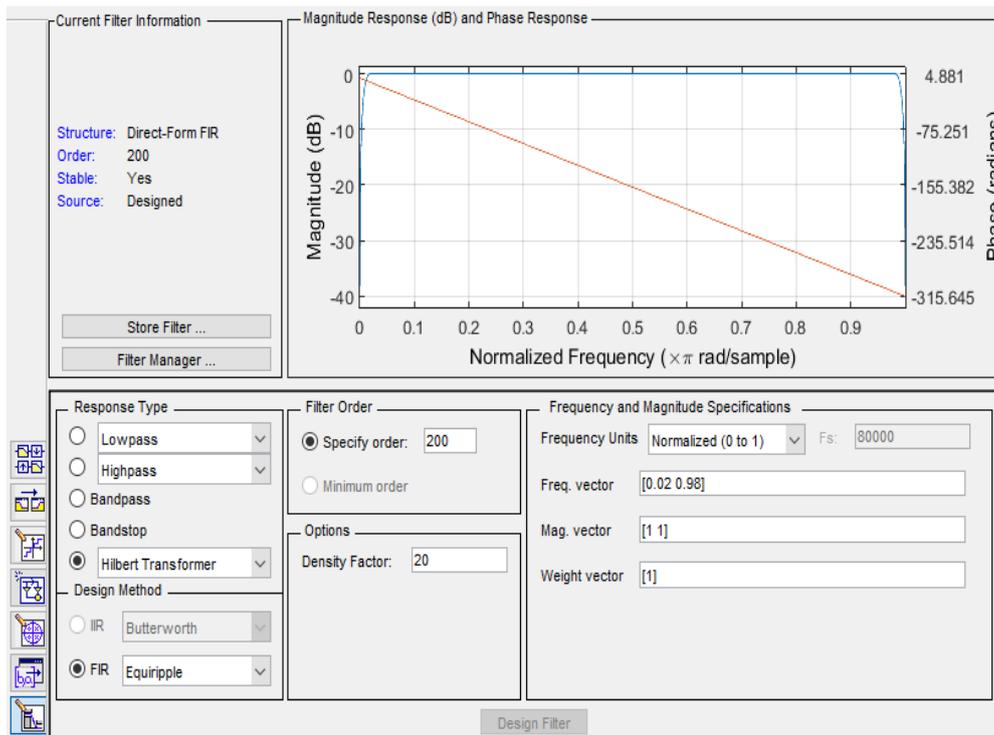


Рисунок 2. Модуль *fdatool* математического пакета Matlab

В модуле *fdatool* необходимо задать тип фильтра «Hilbert Transformer», порядок фильтра «Filter Order», частотный диапазон и соответствующие им амплитуды выходного сигнала. Частоты можно задать как в абсолютном виде, так и в нормализованном виде. После нажатия кнопки «Design Filter» вы-

полнится расчет параметров преобразования Гильберта и будут построены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики (рис. 1). На рисунке 3 представлена импульсная характеристика КИХ-фильтра преобразования Гильберта. При необходимости можно скорректировать параметры

(например порядок фильтра, либо диапазон частот) и добиться наилучшего результата.

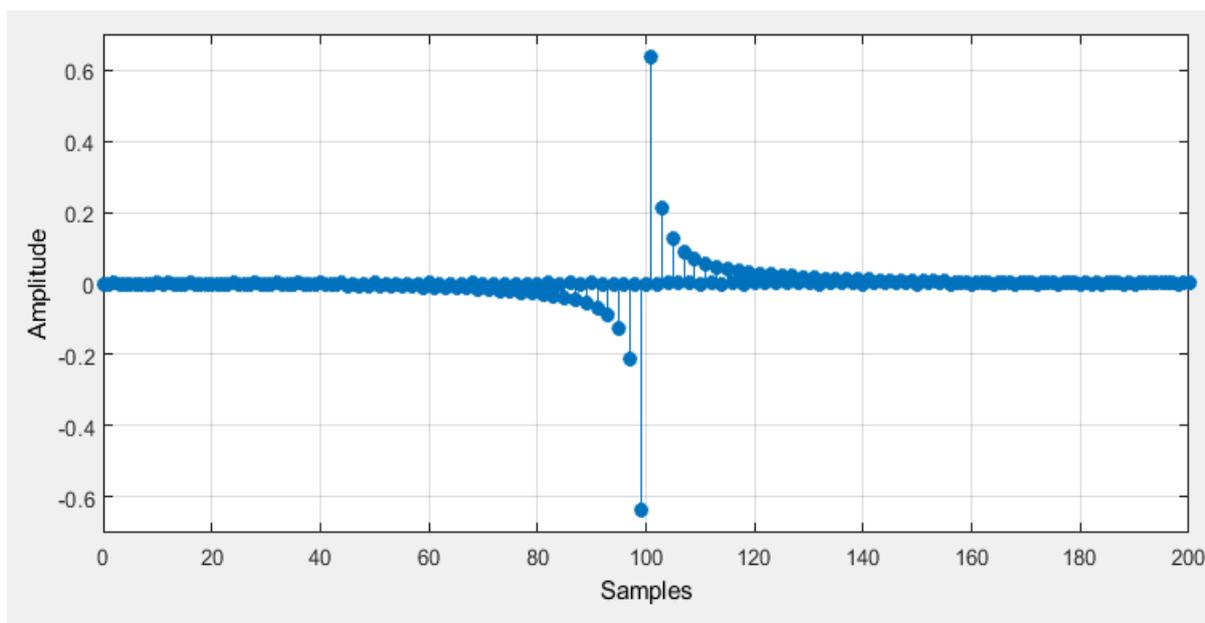


Рисунок 3. Импульсная характеристика КИХ-фильтра преобразования Гильберта

В современных 16-ти, 32-х разрядных микроконтроллерах в составе набора библиотек присутствует библиотека цифровой обработки сигналов с фиксированной точкой. В данной библиотеке присутствуют функции КИХ, БИХ фильтров, быстрое Фурье преобразование и др. Библиотека работает с типами данных Q15 либо Q31, диапазон которых ограничен рядом от -1.0 до 0.99999999. Модуль *fdatool* позволяет вывести значения коэффициентов

в формате фиксированной точки Q15 и Q31. Для этого нужно выбрать в меню «Targets\Generate C header...».

Рассмотрим пример. Применяя преобразование Гильберта к вещественному сигналу (рис. 4), мы получаем комплексный сигнал, пример которого представлен на рисунке 5. На рисунке сигнал 1 – вещественная составляющая, 2 – мнимая составляющая комплексного сигнала.

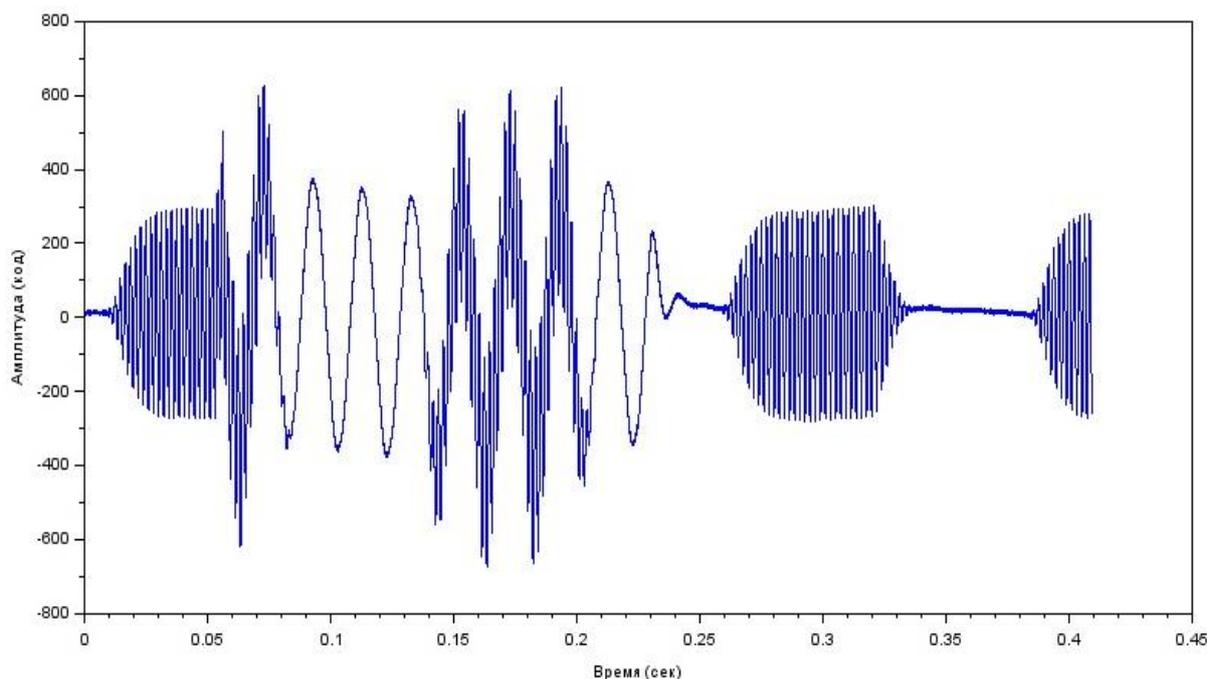


Рисунок 4 Вещественный входной сигнал

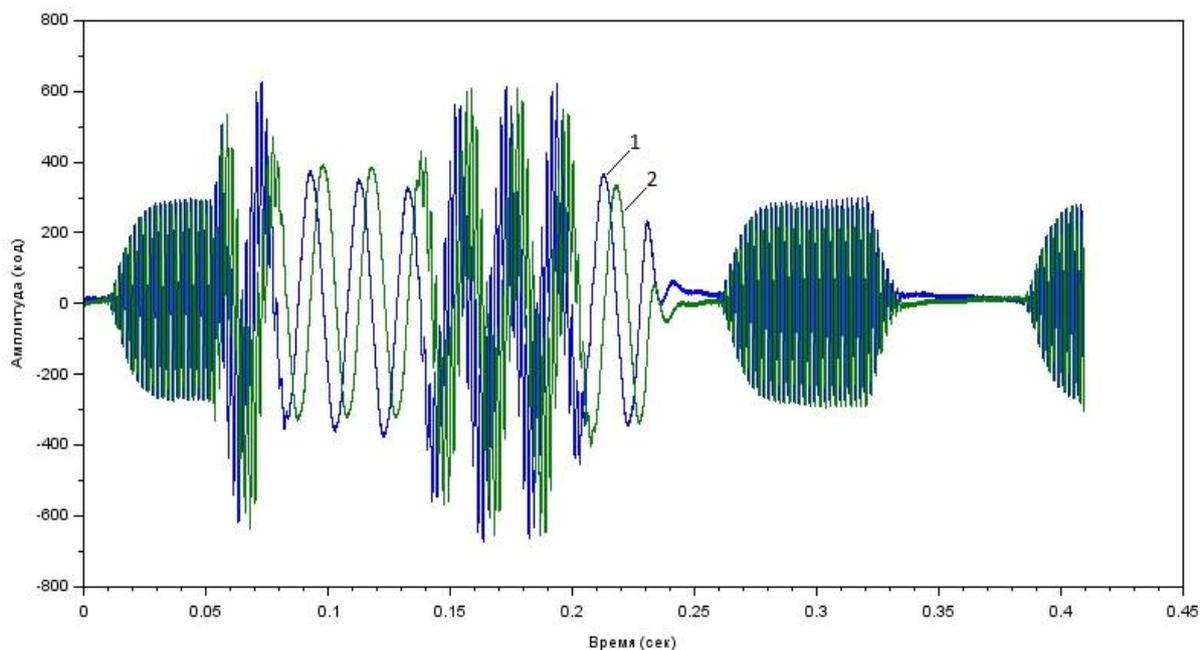


Рисунок 5. Комплексный сигнал. 1- вещественная, 2- мнимая составляющая.

Следует отметить, квадратурный сигнал не дает новой информации об аналоговом сигнале по сравнению с действительным сигналом. Его следует рассматривать как более удобный носитель информации, для определенных видов сигнала, при дальнейшей цифровой обработке данных.

Реализованные в ЭВМ и цифровых сигнальных процессорах Фурье-преобразование (БПФ) в своей основе работает с комплексными данными. В случае выполнения преобразования над действительными числами, мнимая составляющая обнуляется. Таким образом Фурье-преобразование квадратурного сигнала эффективнее по сравнению с преобразованием действительного сигнала.

Если исследуемый входной сигнал модулирован, и требуется в реальном режиме времени определять мгновенную амплитуду и мгновенную фазу огибающего сигнала, то более эффективно использовать квадратурный сигнал. Расчет приведенных параметров осуществляется по следующим формулам:

$$A = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2)$$

Рассмотрим пример из области железнодорожного оборудования, где для передачи кодовых посылок в подвижные единицы, используется система автоматической локомотивной сигнализации АЛС-ЕН. В ней от напольных устройств на локомотивные передается информация о показаниях напольных светофоров, о свободности и целостности рельсов в пределах шести блок-участков, находящихся перед движущимся поездом, о 16 градациях допустимой скорости проследования очередного светофора, о длинах блок-участков, а также сигналы, предназначенные для исключения взаимных влияний между трактами передачи различных путей и

блок-участков. Для кодирования информации используется восьмиразрядный модифицированный код Бауэра. Всего передается 256 сообщений. В передатчике системы АЛС-ЕН используется двукратная фазоразностная модуляция с несущей частотой $174,38 \pm 0,1$ Гц.

Рассматривая процедуру декодирования кодовых посылок АЛС-ЕН применительно к записанной выборке вещественного рельсового сигнала, определим следующую последовательность действий:

1. От вещественного представления сигнала перейдем к комплексному. Для этого применим дискретное преобразование Гильберта. Данную операцию можно выполнять на этапе преобразования сигнала в микроконтроллере.

2. Сдвинем интересующую нас частоту на нулевую. Для этого аналитический сигнал умножим на комплексную экспоненту заданной частоты вида $\exp(-j2\pi \cdot f_c n / f_d)$, где f_d – частота дискретизации и $f_c = 174,58$. Знак минус в формуле комплексной экспоненты определяет направление сдвига частот, в нашем случае влево.

3. Пропустим полученный сигнал через фильтр низких частот с частотой среза 8 Гц.

4. Рассчитаем мгновенные амплитуду и фазу огибающего сигнала по формулам (2).

Графики мгновенной амплитуды и мгновенной фазы огибающего сигнала несущей частоты 174,58 Гц представлены на рисунке 6 и рисунке 7, соответственно. По мгновенным значениям амплитуд огибающего сигнала можно вычислять мгновенные и действующее значения тока передаваемого сигнала АЛС-ЕН. По мгновенным значениям фазы огибающего сигнала можно декодировать информационные данные. На рисунке 7 представлена таблица результатов процедуры декодирования информационных данных, рассмотрим ее.

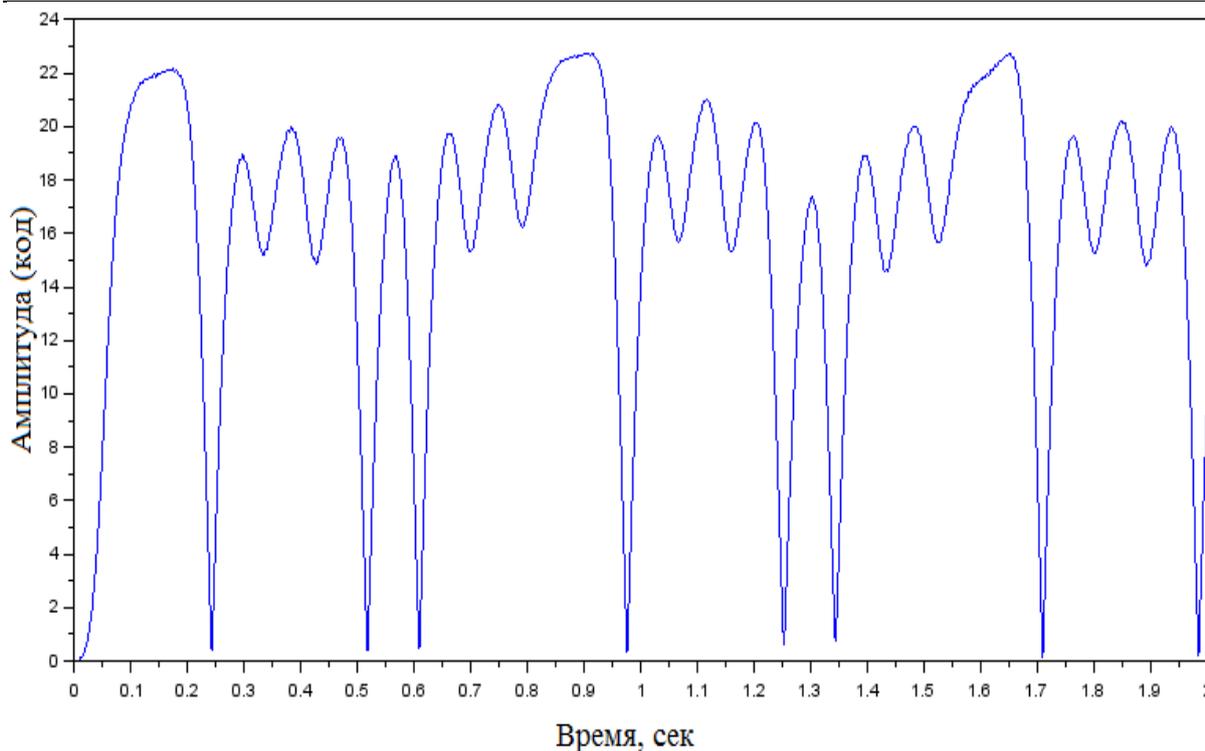
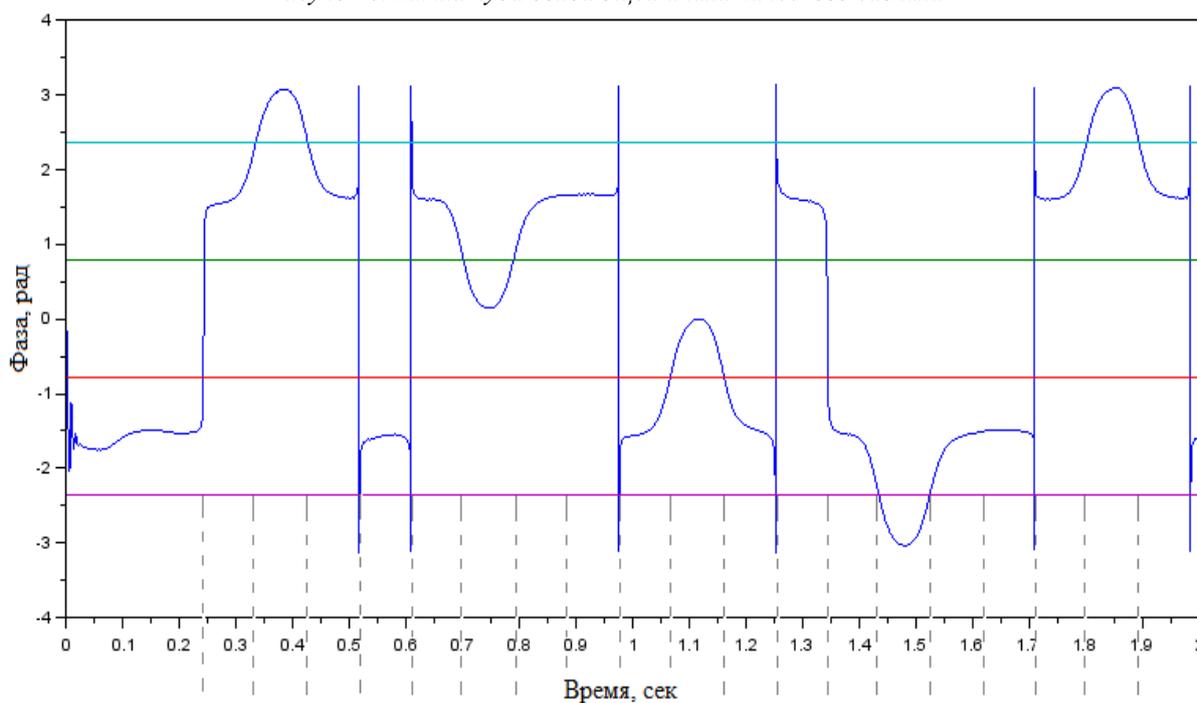


Рисунок 6. Амплитуда огибающей аналитического сигнала



Изм. Фазы	г	+	-	г	г	-	+	·	г	+	-	г	г	-	+	·	г	+	-
СГ	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
КК	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
М.код Бауэра	СГ=11; КК = 7									СГ=11; КК = 7									

Рисунок 7. Фаза огибающей аналитического сигнала

Особенностью модифицированного кода Бауэра является то, что он не имеет комбинаций с одними нулями или единицами. Данный код является самосинхронизирующимся кодом, при котором любой циклический сдвиг его комбинации не приво-

дит к ложному появлению разрешенных комбинаций. В связи с этим, отправной точкой для анализа фазового сигнала выбираем состояние, при котором происходит переход изменения фазы через ноль (в примере это время 0,24 сек), далее фиксируем изменение фазы через 0,091 сек. В таблице

(рис. 7) символами представлено изменение фазы: «.» - фаза не менялась; «+» - увеличение фазы на $\pi/2$; «-» - уменьшение фазы на $\pi/2$; «г» - изменение фазы на π . Величина изменения фазы однозначно определяет битовое состояние двух подканалов: синхрогруппы (СГ) и кодовой комбинации (КК). Непрерывный анализ последовательности восьми бит, по каждому подканалу, на корректность правил модифицированного кода Бауэра дает результат: $CG=11$; $KK=7$.

Заключение

Задача по вычислению основных параметров модулированных сигналов может быть решена стандартными методами обработки вещественных сигналов, без преобразования их в комплексный вид. В некоторых случаях целесообразно работать с вещественными сигналами, в условия ограничения вычислительных ресурсов, так как математические операции с комплексными переменными более трудоемки. Но так как существующие методы цифровой обработки более эффективны при обработке комплексных сигналов (например, мнимые компоненты не обнуляются при БПФ) и современ-

ные вычислители постоянно наращивают вычислительный потенциал, то обработка сигналов в комплексном виде имеет перспективу.

Определяющим фактором в рассмотренной выше процедуре является применение дискретного преобразование Гильберта к входным вещественным данным и, соответственно, переход к аналитическому представлению сигнала. Данная операция не является ресурсоемкой, применяя микроконтроллерные функции с фиксированной точкой и с рассчитанными коэффициентами в математических пакетах, аналогичных Matlab. И как следствие, рассмотренная процедура декодирования рельсовых сигналов с фазоразностной модуляцией не представляется сложной, благодаря переходу к комплексному (аналитическому) виду измерительного сигнала.

Список литературы:

1. Understanding digital signal processing / Richard G. Lyons. - 3rd ed. 2011. ISBN 0-13-702741-9
2. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. - 3-е изд. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 768 с.: ил.

*Vlasenko T.S.*¹

Candidate of sciences (physics and mathematical), manager of department

Hvalin D.I.^{1,2}

engineer

Mystetskyi V.A.^{1,2}

engineer

¹*Institute for Safety Problems of Nuclear Power Plants, NAS of Ukraine*

²*Institute of Electrodynamics, NAS of Ukraine*

COMPLEX MATHEMATICAL SIMULATION OF PHYSICAL PROCESSES IN POWERFUL GENERATOR

Abstract. Algorithm of stage solve a quasi-three-dimensional model for determination of electromagnetic field and distribution temperature in the stator core end zone of powerful generator using a numerical method is given. A model is the intermediate version between two-dimensional and three-dimensional solutions and is based on the numeral calculations in transversal and longitudinal sections of electrical machine, interconnected by a complex of boundary conditions. The mathematical model differs from are known more complete account of the physical and technical factors and the high accuracy of the calculation results with a relatively simple the software implementation. In particular, developed a method for electromagnetic field, allows description the currents of stator winding frontal part with consider the geometric shape of frontal connections and, most importantly, the load condition of turbogenerator.

Keywords: *mathematical model, end zone, stator core, winding frontal part, electromagnetic field, temperature.*

At present developed a lot of different convenient simulation software for computer calculations and design of electromechanical energy converters, in particular powerful turbogenerators. The most well-known complexes are FEMLAB, ANSYS, MAXWEL and COMSOL Multiphysics.

The COMSOL Multiphysics software [12] deserves special attention, because used today in many universities of the world, as well as the professional researchers of various fields.

The most significant advantage of Comsol Multiphysics software is the ability to solve multiphysical problems allows creating the complex (interrelated)

mathematical models. Also an important advantage is the simplicity of interface in a coefficient form, that enables the researcher to simulate of physical processes without focusing directly on the solving of differential equations, while paying serious consideration to variation calculations (experiments) for solving of set tasks.

As an example, in this paper a complex simulation the electromagnetic and temperature fields in end zone of a powerful turbogenerator using the Comsol Multiphysics 3.5a software is performed. As known, the construction of mathematical models for analysis the physical processes in this zone of turbogenerator is very problematic [4 – 7, 9, 13, 14], because the difficult of

this problem makes researcher to apply a series of simplifications in the formulation of a task, that suitable in some cases and unsuitable for others, resulting obtained solutions often too approximate describe the nature of electromagnetic field.

A three-dimensional model have not found wide application because of complexity the end zones design of powerful generators requires very much computing trouble and even with modern computer technology needs a series of simplifications, also because the formation of meaningful and sufficiently detailed conclusions concerning parameters and characteristics of the object requires a large number of variation calculations [4]. Therefore used an approach for the analysis of heat processes in the stator core end zone of turbogenerator with help a consecutive logic transition from the solution of a simple calculation model the electromagnetic field in active part machine to more difficult calculations models in end zone using the previous results in the following, that allows to obtain a solution for determination of temperature distribution in difficult areas. The use of specialized software for development of mathematical model allowed creating a one that is sufficiently flexible in terms of modification the individual components and allows the researcher *to concentrate on achieving of set goal*, rather than solve of utilitarian tasks.

As a research object, a serial turbogenerator the TGV-500 type of 500 MW capacity (by Kharkov State Enterprise plant "Electrowazhmash") is considered. That due to the presence of experimental data [7 – 9], that allows to correct the reliability of electromagnetic and thermal calculations and to simplify heat calculation due to known heat transfer coefficients.

A staged construction algorithm of a mathematical model is as following.

On the first stage, a two-dimensional electromagnetic field model in transversal section of central (active) zone of a turbogenerator is considered (Fig. 1). In general case the equation of a two-dimensional electromagnetic field for the axial component of the magnetic vector potentials A_z will be:

$$j\omega\sigma A + \nabla \times (\mu_0^{-1} \mu_r^{-1} \nabla \times A) = J_z^e e_z, \quad A = A_z e_z \quad (1)$$

where ω is the angular frequency; σ is the electric conductivity; ∇ is the Hamilton operator; μ_0 is the permeability of vacuum; μ_r is the relative permeability; A is the magnetic vector potential; J_z is the external current density; e_z is the unit vector.

Since the stator core is composed of sheets the high-alloy cold-rolled electrical steel with a thickness 0.5 mm, eddy current from the radial field can be neglected. The calculation of additional losses in the stator end packets of turbogenerator with acceptable accuracy can be made only for the axial component of the magnetic flux density. So, the electromagnetic field of central part of a turbogenerator in the Cartesian coordinate system satisfies the Poisson equation and, in this case, the well-known model [1] is considered:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (2)$$

Equation (2) is supplemented by next boundary condition on the outside of solving region:

$$A_z |_G = 0 \quad (3)$$

and continuity condition for the magnetic flux on the inside of solving region.

In the stator winding taken a symmetric system of phase currents [4, 5]:

$$\begin{cases} i_A = I_m \cos(\omega t + \beta) \\ i_B = I_m \cos(\omega t + \beta - 120^\circ) \\ i_C = I_m \cos(\omega t + \beta + 120^\circ) \end{cases} \quad (4)$$

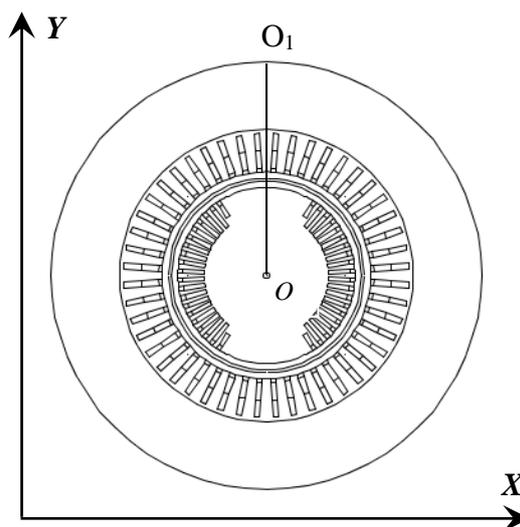
where I_m is the magnitude of stator current; β is the angular displacement of axis along which operates the motive-magnetic force of three-phase stator winding in relation to the longitudinal axis of rotor d .

The angle β is determined by the formula:

$$\beta = 90^\circ + \theta + \varphi, \quad (5)$$

where θ is the load angle of machine; φ - phase displacement between voltage and stator current.

The load angle θ can be found from the equation [7]:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_s \cos \varphi}{(U_s / x_d) \pm I_s \sin \varphi}, \quad (6)$$

where I_s , U_s are the phases stator current and voltage, respectively; x_d is the main inductive resistance; the «plus» sign corresponds to overexcitation mode of

turbogenerator, and the «minus» is underexcitation mode.

The magnitude of currents in the stator and rotor windings and the angle β are given in accordance with the load conditions of turbogenerator.

The model takes into account the rotor movement relative to the stator. The rotation is simulated using a Moving Mesh (ALE). The displacement of the finite-element mesh is given by the transformation equation:

$$\begin{cases} dx = \cos(2\pi nt) \cdot X - \sin(2\pi nt) \cdot Y - X \\ dy = \sin(2\pi nt) \cdot X + \cos(2\pi nt) \cdot Y - Y \end{cases}, \quad (7)$$

where dx, dy are the displacement along x and y coordinates, respectively; X, Y are the coordinates of initial points, n is the speed of rotation.

The expression in brackets is the certain angle (in radians), and time t is the parameter by which the rotor does movement on angle $(2\pi nt)$ relative to the initial position. A static calculation is performed, and one fixed position of rotor and fixed magnitude of currents in the windings (at $t=0$) are considered, the results of which then used as initial conditions for the dynamic effect (more precisely, the parametric calculation). In this case, the Poisson equation does not depend on time, its solution is determined by the instantaneous values of currents in the windings and the geometry of solving region, which varies because of displacement of rotor coordinates.

After calculated the electromagnetic problem individually solves the problem of eddy currents distribution from the main radial field for each massive element of a turbogenerator (press plate, press fingers, copper shield), and it's the average magnitude is used for calculation the thermal problem.

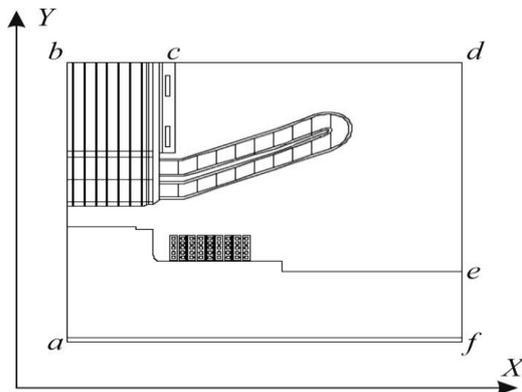


Fig. 2

In the second stage, taking into account the field distribution in central part, the electromagnetic field in longitudinal section is simulated (Fig. 2). Taking into account the symmetry of the machine along axial and radial directions, the calculation area of end zone is considered as the rotor section along its axis and the section of the stator core tooth in the tangential direction (circumferentially) [13, 14]. This section coincides with the rectangular coordinate plane XY and is the symmetry plane of rotor (in Fig. 1 it passes along the radius OO_1).

The equation of a two-dimensional magnetic field for the component A_z (is tangential component in the solving region) has the form (1). The required structure lines of force for electromagnetic field is formed by means of boundary conditions complex on lines $abcdef$ for the magnetic vector potentials and magnetic field [2, 3] (Fig. 2).

On line bc installed the magnitude of magnetic field in the point O_1 (Fig. 1):

$$H|_{bc} = H|_{O_1}, \quad (8)$$

and on the line af – condition of symmetry the magnetic field concerning rotor axis:

$$n \times H|_{af} = 0. \quad (9)$$

Along the line ab installed the distribution of magnetic field, a similar to the distribution along the same line in transversal section (lines OO_1 , Fig. 1):

$$H|_{ab} = H(r)|_{OO_1}. \quad (10)$$

It is assumed that for remote lines cd, de and ef the magnetic field falls, so on the lines installed:

$$A_z|_{cdef} = 0. \quad (11)$$

At the same time installed the distribution of magnetic permeability along the radius OO_1 – $\mu|_{OO_1}$, which varies due to different saturation of stator magnetic core with the radial field.

Thus, the interconnection of electromagnetic fields in central and end zones of turbogenerator is installed. The effect of load condition is taken into account by the magnitude of currents in the stator and rotor windings, angle β and boundary conditions.

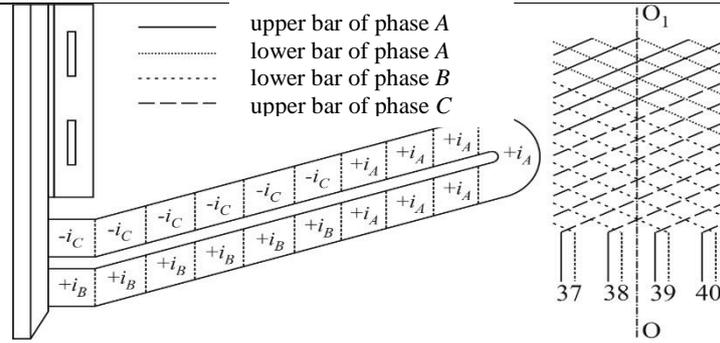


Fig. 3

An important stage in the calculation of the electromagnetic field in the end part is the description of currents in the winding frontal part. The proposed model of end zone turbogenerator allows description the currents of stator winding frontal part with consider the geometric shape of frontal connections and, most importantly, the load condition [2, 3]. The direction of phase instantaneous currents i_A , i_B , i_C of stator winding frontal part and the part of its scheme (together with section OO_1) is shown in Fig. 3.

The currents in the winding frontal part (Fig. 3) less than taken in the system (4) at $\sqrt{2}$ time, since the front parts are bent an average on 45° . Since the longitudinal section of turbogenerator passes along the longitudinal axis of rotor d (Fig. 1), the magnitude of current density of rotor winding frontal part corresponds to the given excitation current.

The electromagnetic calculation is performed for the whole of solving region.

Individually solves the problem of eddy currents distribution from the axial magnetic fluxes of windings frontal parts. Since the rotor moves synchronously with the field, a non-zero electric conductivity is given in the stator core packets, press finger, copper shield and press plate.

Taking the obtained results of electromagnetic calculations as a source of heat losses, the problem of distribution temperature is solved.

The equation of a two-dimensional stationary temperature field is given by equations:

$$\nabla(-k\nabla T) = Q, \quad (12)$$

where k is the thermal conductivity; T is the temperature; Q is the heat source.

The heat calculation is performed for only in end zone stator core.

The turbogenerator under consideration has a radial ventilation system. Cold hydrogen is fed into the radial channels between the stator packets and between the press fingers and plate from side of the gap with the further movement towards the stator yoke.

Boundary conditions are installed. Heat transfer to the environment is carried into effect by means of convective heat exchange between a heated surface and a stream of cooling hydrogen. The general equation has the form:

$$-\vec{n} \cdot \vec{q} = q_0 + h(T_{\text{inf}} - T) \quad (13)$$

where h is the heat transfer coefficient, T_{inf} is the external temperature.

Installed the next boundary condition for the water circulating in the cooling channels of the press plate and stator winding frontal part:

$$T = T_0. \quad (14)$$

Installed the boundary condition of symmetry on line passes in the middle of the last ninth packet of solving region:

$$\vec{n} \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (15)$$

The finite element mesh is the same for both the electromagnetic and thermal problems.

In order to verify the reliability of developed algorithm was performed a control calculation and comparison of the obtained values of the temperature for end zone of turbogenerator type TGV-500 under rated load conditions in accordance with experimental data for temperature field of stator core end packet and heat transfer coefficients [7 – 9].

The heat transfer coefficients [in $W/(m^2 \cdot K)$] for turbogenerator type TGV-500 have the following values [7 – 9], Fig. 4:

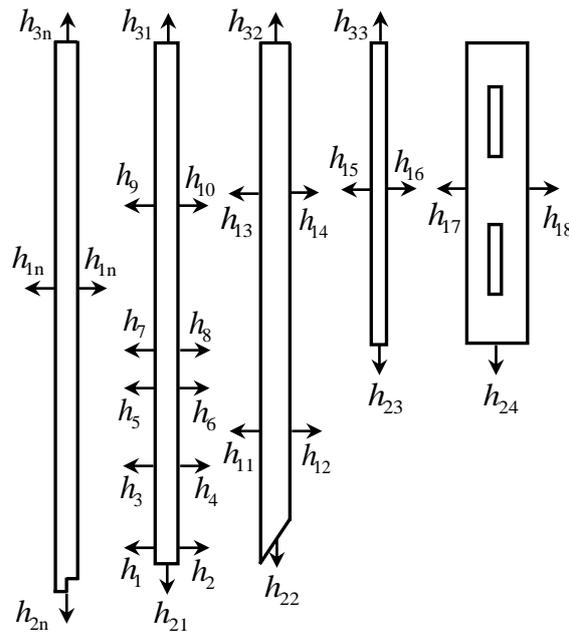


Fig. 4

– for end packet:

$h_1 = 474$; $h_2 = 332$; $h_3 = h_5 = h_7 = 354$; $h_4 = h_6 = 248$; $h_8 = 225$; $h_9 = 221$; $h_{10} = 209$; $h_{21} = 1330$; $h_{31} = 205$;

– for press finger:

$h_{11} = h_{12} = 280$; $h_{13} = h_{14} = 243$; $h_{22} = 1280$; $h_{32} = 243$;

– for copper shield:

$h_{15} = h_{16} = h_{23} = 280$; $h_{33} = 243$;

– for press plate:

$h_{17} = 280$; $h_{18} = 200$; $h_{24} = 384$;

– averaged value for other packets:

$h_{1n} = 241$; $h_{2n} = 1000$; $h_{3n} = 200$.

With help a mathematical simulation in accordance with the given algorithm (1) – (15) for turbogenerator type TGV-500 under rated load conditions the following results were obtained.

The instantaneous distribution of magnetic flux density and vector magnetic potential in central zone of a turbogenerator (for $t = 0,02$ sec corresponding to one full revolution of rotor, the step size of time is 1^{-4} sec, that is, at one step the rotor turns to $1,8^\circ$) is shown in Fig. 5. The distribution of magnetic permeability is shown in Fig. 6. As can be seen in this figure, the maximum value is 8542 and appears in the stator yoke.

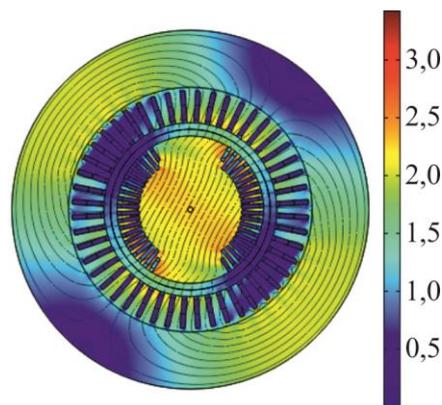


Fig. 5

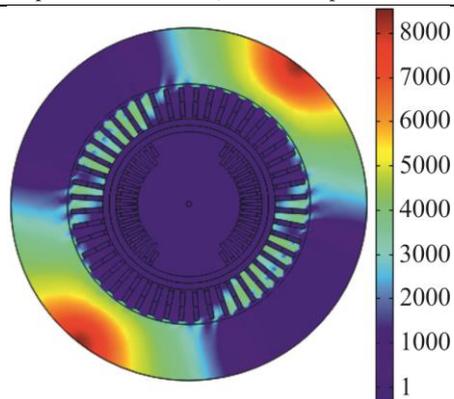


Fig. 6

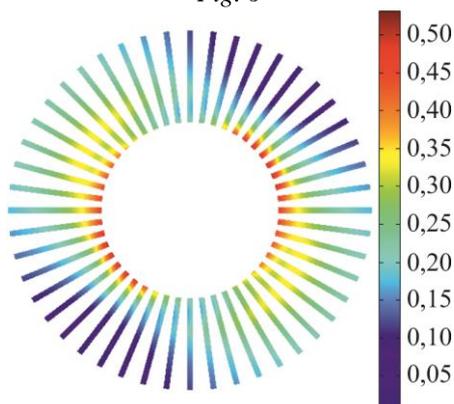


Fig. 8

As can be seen in Fig. 7, the maximum magnetic flux density of stator core under rated load is 3.4 T and appears in the tooth crown, the magnetic field distribution is symmetrical along the pole central line and the maximum values appear in the pole central line [14]. The distribution of magnetic flux density in the press fingers is shown in Fig. 8. The values magnetic flux densities of non-magnetic steel fingers are lower and the maximum value is 0.53 T.

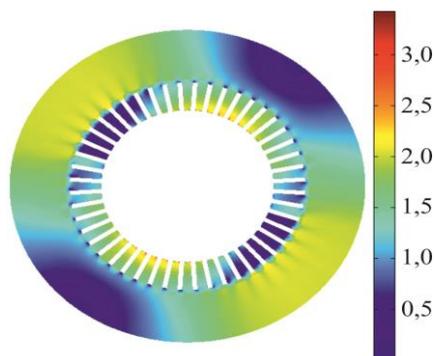


Fig. 7

The press plate and copper shield materials are nonmagnetic too, and the press plate is before to the copper shield. So, their magnetic field distributions are coincident [14]. The maximum magnetic flux densities are 0.36 T and 0.33 T, respectively (Figs. 9 and 10).

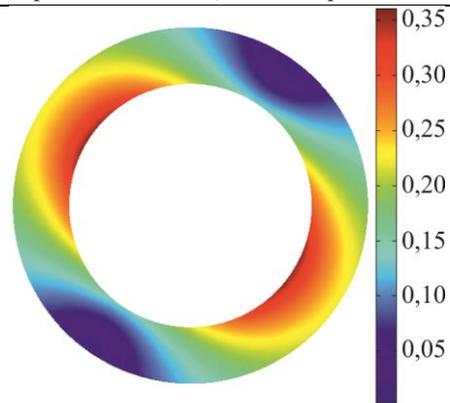


Fig. 9

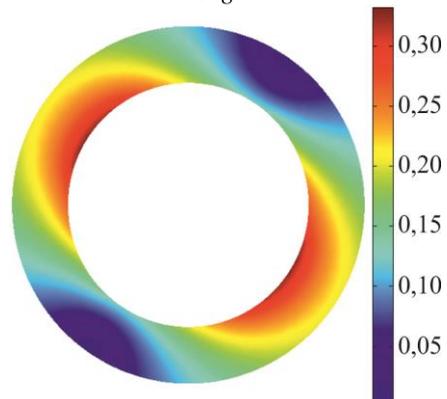


Fig. 10

Figs. 11, 12 and 13 shows the distribution of the eddy current density from the main radial field in the press fingers, the plate and the copper shield. For the good conductivity of the copper, the eddy current value of the copper shield is much larger than that of the non-magnetic press fingers and plate [14].

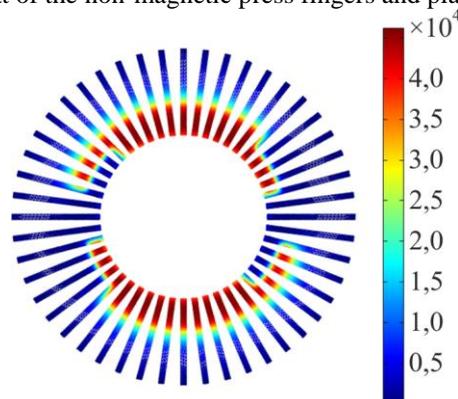


Fig. 11

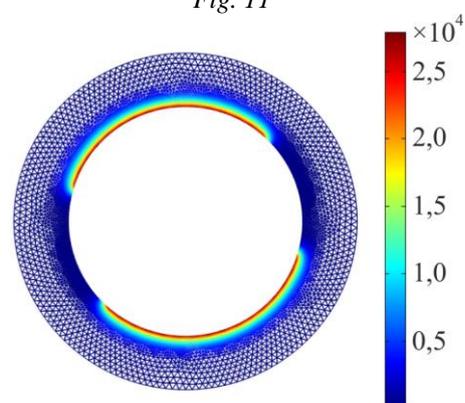


Fig. 12

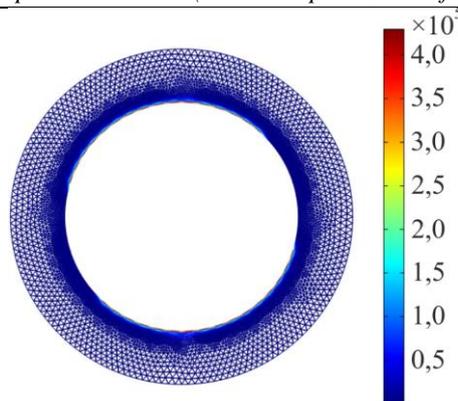


Fig. 13

The distribution of magnetic field in turbogenerator end zone under rated load is shown in Fig. 14. The distribution of temperature in stator core end zone is shown in Fig. 15.

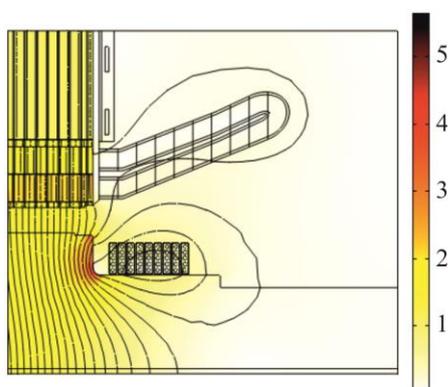


Fig. 14

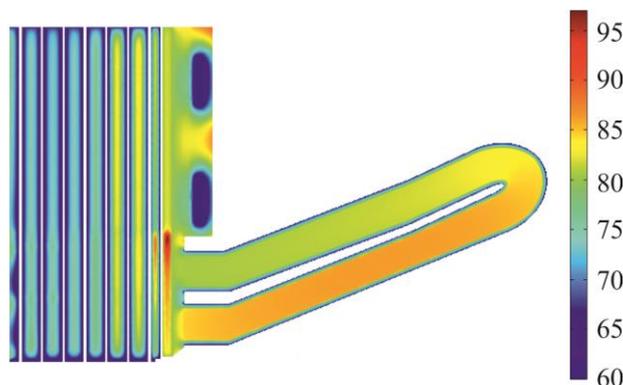


Fig. 15

The maximum temperature in the tooth root of stator end packet is 97 °C, the press plate is 91 °C, the copper shield is 86 °C and the press finger is 85 °C. The maximum temperature in the tooth zone of end packet is explained by the combined effect of the main radial field, the axial scattering flux of windings frontal part of stator and rotor, as well as by the “buckling” of a portion of the main field from the air gap. In addition, the shield effect of press plate is the cause of field local concentration in the end packet tooth zone.

The temperature distribution in press plate depends on the channels with cooling water. However, they are effective only in beside the plate, and for heating the copper shield are not affected. With the distance from the end packets tooth zone with the maximum

temperature towards the stator yoke the temperature sharply decreases due to the shield effect of press plate and the copper hoop. The temperature also decreases when approaching the gap. The axial component of magnetic flux density in the crown tooth zone is 0.70 – 0.75 T (the end of the first packet), however, this zone is intensively cooled with gas circulating in the gap.

In order to verify the reliability of obtained results was performed a comparison of the temperature values for end zone of turbogenerator type TGV-500 under rated load conditions in accordance with experimental data [7 – 9].

Experimental data correspond to the stationary heat of stator core end packet from the turbine side at section of 1/8 width of packet from stator core end

along the axis of a turbogenerator. The differences of calculated and experimental values did not exceed 7% (Table 1), indicating a high reliability of the applied approaches and assumptions.

Table 1

Source of information	Temperature, °C			
	Tooth			Yoke
	Crown	Middle	Root	Middle
Nominal load condition ($P = 495 \text{ MW}$, $\cos \varphi = 0,848$)				
Calculation	50,9	51,25	72,37	56,63
Experiment	--	54,90	76,20	53,70
Error, %	--	6,65	5,03	5,46

Conclusions

1. The advantages of constructing models in the Comsol Multiphysics software are shown. The most significant advantages are the ability to solve multiphysical problems, the interface simplicity, the easiness simulation and powerful visualization.

2. A quasi-three-dimensional mathematical model of coupling calculation the electromagnetic field and heat of powerful turbogenerator end zone is developed. The mathematical model differs from are known more complete account of the physical and technical factors and the high accuracy of the calculation results with a relatively simple the software implementation. In particular, developed a method for calculating the end zone turbogenerator electromagnetic field, allows description the currents of stator winding frontal part with consider the geometric shape of frontal connections and, most importantly, the load condition of turbogenerator. It is important to emphasize, that all known today a quasi-three-dimensional models the end zone of powerful electrical machine have a homogeneous character of stator winding frontal part.

3. The results of simulation characterizing the distributions of currents, magnetic flows and temperature in the depth of end zone elements and stator core packets, and interesting to specialists and engineering staff associated with the development of electrical equipment.

4. The presented mathematical model allows at the design stage to evaluate the efficiency of design solutions for the construction of stator end zone of a turbogenerator for different load conditions, including the conditions of reactive power consumption.

Literature

1. Vaskovskiy Yu.M. The field analysis of electric machine. Kiev: NTUU «KPI», 2007. 191 p. (Ukr)
2. Kesytskiy O.G., Hvalin D.I. Distribution of electromagnetic field in the end zone of turbogenerator under nominal load condition. *Tekhnichni visti*. 2018. № 1(47), 2(48). P. 11 – 14. (Ukr)
3. Kesytskiy O.G., Hvalin D.I. The end zone turbogenerator electromagnetic field for changes the reactive load. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2018. № 1. P. 62 – 68. (Ukr)

4. Milykh V.I., Vysochyn A.I. Calculation the three-dimensional magnetic field distribution of powerful turbogenerator in idling conditions. *Elektrotehnika i elektromekhanika*. 2011. № 3. P. 17 – 22. (Rus)

5. Milykh V.I., Polyakova N.V. The directions and phase relations system of electromagnetic quantities for numerical calculations of magnetic fields in a turbogenerator. *Elektrotehnika i elektromekhanika*. 2011. № 5. P. 33 – 38. (Rus)

6. Milykh V. I., Polyakova N. V. Numerical calculations of the magnetic fields in a turbogenerators end zone. *Vistnyk Natsionalnoho tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Ser.: Electrical Machines and Electromechanical Energy Conversion. 2015. № 5 (1114), P. 3 – 11. (Rus)

7. Postnikov I.M., Stanislavskiy L.Ya., Schastliviy G.G. Electromagnetic and thermal processes in the end parts of powerful turbogenerators. Kiev: Naukova dumka, 1971. 360 p. (Rus)

8. Schastliviy G.G., Fedorenko G.M., Vygovskiy V.I. Apparatus for measurement heat transfer in the electrical machines and devices. *Elektrotekhnicheskaya promyshlennost*. Ser.: Electrical Machines. 1978, № 7. P. 10 – 13. (Rus)

9. Schastliviy G.G., Fedorenko G.M., Vygovskiy V.I. Turbo- and hydrogenerators at the variable loading graphics. Kiev: Naukova dumka, 1985. 208 p. (Rus)

10. Khutoretskiy G.M., Tokov M.I., Tolvinskaya E.V. Turbogenerators design. Leningrad: Energoatomizdat, 1987. 256 p. (Rus)

11. Titov V.V., Khutoretskiy G.M., Zagorodnaya G.A., Varatian G.P. Turbogenerators. Be calculation and construction. Leningrad: Energiia, 1967. 895 p. (Rus)

12. Comsol Multiphysics Modeling and Simulation Software. Available at: <http://www.comsol.com/>.

13. Fujita M., Ueda T., Tokumasu T. Eddy current analysis in the stator end structures of large capacity turbine generators. *International Conference on Electrical Machines and Systems*. Nov. 2009, Tokyo, Japan. P. 1 – 6.

14. Li Wei-li, Guang Chunwei, Zheng Ping. Calculation of a complex 3-D model of a turbogenerator with end region regarding electrical losses, cooling, and heating. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 2010. Vol. 26. № 4. P. 1073 – 1080.

Koldaev A.I.,
candidate of technical Sciences, head of the
Department of information systems, electric drive and automation of
Nevinnomyssk technological Institute (branch) of
Federal STATE Autonomous educational institution "North-Caucasian Federal University»

Lyubitsky M.V.,
candidate of technical Sciences,
associate Professor of information systems, electric drive and automation,
Nevinnomysskiy technological Institute (branch) of NORTH Caucasus Federal University»

Chebanov K.A.,
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor,
head of the Department of electric power engineering of "
Nevinnomyssk state humanitarian and technical Institute""

Vdovin S.A.,
graduate student in the field of training 15.04.04
"automation of technological processes and productions"
Nevinnomysskiy technological Institute (branch) of
Federal STATE Autonomous educational institution "North-Caucasian Federal University»

THE USE OF CONTROLLED ELECTRIC DRIVES IN OIL AND GAS INDUSTRY

Колдаев Александр Игоревич,
кандидат технических наук,
заведующий кафедрой информационных систем, электропривода и автоматики,
Невинномысский технологический институт (филиал)
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Любицкий Михаил Владимирович,
кандидат технических наук,
доцент кафедры информационных систем, электропривода и автоматики,
Невинномысский технологический институт (филиал)
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Чебанов К.А.,
кандидат педагогических наук, доцент,
заведующий кафедрой электроэнергетики ГАОУ ВО
"Невинномысский государственный гуманитарно-технический институт"

Вдовин Семен Андреевич,
магистрант по направлению подготовки 15.04.04
«Автоматизация технологических процессов и производств»
Невинномысский технологический институт (филиал)
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛИРУЕМЫХ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ В НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ

Abstract: In this paper we consider the possibility of replacing AD and SD in controlled drives on synchronous motors with permanent magnets (SDPM) with frequency converters, when it is important technical and economic performance for the oil and gas industry.

Аннотация: В настоящей работе рассмотрены вопросы возможности замены АД и СД в регулируемых приводах на синхронные двигатели с постоянными магнитами (СДПМ) с частотными преобразователями, когда имеет важное значение технико-экономические показатели работы для предприятий нефтегазовой отрасли.

Keyword: Asynchronous, synchronous motor, synchronous motor with permanent magnets, frequency Converter, efficiency., reliability.

Ключевые слова: асинхронный, синхронный двигатель, синхронный двигатель с постоянными магнитами, преобразователь частоты, к.п.д., надежность.

Нефть и газ остаются основными энергоносителями современных мировых цивилизаций в ближайшие десятилетия. Технологическое перевооружение нефтяной и газовой промышленности призвано повысить эффективность использования электрической энергии и существующего оборудо-

вания. Электроприводы используются в составе буровых установок, механизмов для непосредственной добычи нефти, объектах сбора и внутри промысловой перекачки нефти, объектах подготовки нефти, газокomppressorных станциях, компримирующих попутный нефтяной газ, объектах поддержания пластового давления, водораспределительных

блоках, водозаборах, установках по очистке сточных вод, объектах вспомогательного назначения.

В идеале - управляемость всех технологических операций, связанных с добычей, транспортировкой и переработкой нефти, должна быть связана с использованием регулируемого электропривода.

В настоящее время применяют асинхронные и синхронные приводы с управляемыми преобразователями частоты (ПЧ). Неудачные попытки использовать ту или иную систему электропривода объясняются тем, что их выбор делался без учета пяти основных критериев, предъявляемых к системе [1,2,3].

1. Пусковой момент должен быть больше номинального в 1.5 – 2.5 раз.

2. Отсутствовать колебательность электромагнитного момента при пуске [3], которая часто является причиной, в частности, гидравлических ударов.

3. Кратность пускового тока должна ограничиваться величиной до 3- 4 кратного значения по отношению к номинальному.

3. Энергетический КПД привода во время регулирования (в идеале) не должен сильно отличаться по отношению к номинальному значению.

4. Для получения заданных показателей технологического процесса, представленных выше механизмов, электропривод должен быть плавно-регулируемым с диапазоном до 1:20.

5. Надежно работать в сложных геолого-климатических условиях.

6. Система электропривода должна иметь относительно низкую стоимость, а повышение стоимости должно компенсироваться снижением эксплуатационных расходов и повышением надежности.

Асинхронные двигатели в настоящее время являются достаточно массовым электродвигателем переменного тока. Замкнутые системы «ПЧ-АД» достаточно широко распространены со скалярным и векторным управлениями. Учитывая незначительный диапазон регулирования скорости в выше перечисленных электроприводах нефтегазовой отрасли (до двадцати кратного значения) скалярное управление $U/f = \text{const}$ достаточно широко распространено. Но оно имеет недостаток: колебательность электромагнитного момента при пуске [3]. Применение векторного управления связано с необходимостью повышением квалификации обслуживающего персонала и сложностью обслуживания. Кроме того, АД с КЗ ротором имеет недостаток - небольшой воздушный зазор между статором и ротором. Это влияет на надежность системы.

Синхронные приводы с частотным управлением применяются в установках мощностью больше $P_n > 300 \text{ кВт}$ и их функции, во многом, связаны с обеспечением заданных значений производительности и давления в трубопроводах.

В настоящее время имеет место тенденция замены асинхронных и синхронных двигателей на двигатели с постоянными магнитами [4,5], где

имеет важное значение энергоэффективность работы, надежность, а также, где требуемое отношение мощности к крутящему моменту на единицу массы не позволяет использовать асинхронные двигатели [4]. На практике современный двигатель с постоянными магнитами достигает классы эффективности от IE3 до IE4. По сравнению с асинхронным двигателем аналогичного класса эффективности, например, IE3, размер двигателя с постоянными магнитами в два раза меньше стандартного.

За некоторым исключением синхронные электродвигатели не могут правильно функционировать при питании от традиционной сети синусоидального напряжения, поэтому реально существует система «ПЧ-СДПМ».

В большинстве случаев асинхронные электроприводы функционируют также в системе «ПЧ-АД». Рассмотрим вопрос увеличения КПД системы «ПЧ-СДПМ» в сравнении с системой «ПЧ-АД».

В общем случае каталожные значения КПД асинхронного двигателя приводятся для синусоидального напряжения питания при номинальной мощности и частоте вращения. Питание от преобразователя частоты приводит к дополнительным потерям в электродвигателе. В соответствии со спецификацией 60034-17 эти потери оцениваются в 20% от полных потерь (3, с. 14). Эти потери, прямо влияют на декларируемое КПД электродвигателя.

В режиме регулируемой скорости этот К.П.Д., таким образом, определяется следующей формулой [5].

$$p_2 = p_1 / (1.2 - 0.2p_1)$$

p_2 - К.П.Д. асинхронного электродвигателя при питании от преобразователя частоты; p_1 - К.П.Д. асинхронного электродвигателя при питании от сети

Пример: 75 кВт при работе на 1450 мин⁻¹
 $p_1 = 0.93$ - К.П.Д. асинхронного электродвигателя 75 кВт от сети 50 Гц;

p_2 - примерный К.П.Д. этого электродвигателя при питании от преобразователя частоты при 50 Гц
 $p_2 = 0.93 / (1.2 - 0.2 \cdot 0.93) = 0.916$ т.е. 91.6%

Для той же мощности и условий питания К.П.Д. электродвигателя LSRPM равен 95,6% [5].

В последнее время синхронные двигатели с постоянными магнитами (СДПМ) привлекают повышенный интерес в связи с их активным использованием в промышленных электроприводах [4,5]. Типовые установки для использования: насосы, системы вентиляции, компрессоры, конвейеры и т.д. Например, СДПМ [6] рекомендуется для использования в составе приводов станков-качалок на нефтедобывающих скважинах, СДПМ используются в промышленных электроприводах (насосы, системы вентиляции, компрессоры, конвейеры и т.д.), СДПМ широко также применяются для привода компрессоров. СДПМ способны конкурировать с асинхронными и синхронными электроприводами мощностью от 0.75 до 650 кВт [5].

Перечень достоинств:

1. Высокий пусковой вращающий момент, большая перегрузочная способность и пониженная установленная мощность.

2. Высокая рабочая эффективность во всем диапазоне скоростей вращения, возможность работы при $\cos \varphi \approx 1$.

3. Более длительный срок службы. Увеличение срока службы за счет снижения температуры подшипников и ротора.

4. Снижение суммы оплаты за потребленную электроэнергию [4].

5. Меньшую чувствительность к колебаниям напряжения и отсутствие колебательности электромагнитного момента при пуске.

Повышение надежности во многом определяются пусковыми свойствами:

кратности пусковых токов и моментов, колебательностью электромагнитного момента при скольжениях S от 1 до $S_{кр}$ (критического) [3].

В дополнение к [4] произведен сравнительный анализ переходных режимов СДПМ с СД обычного исполнения. На рис.1-6 приведены графики переходных процессов СДПМ и СД при пуске [7].

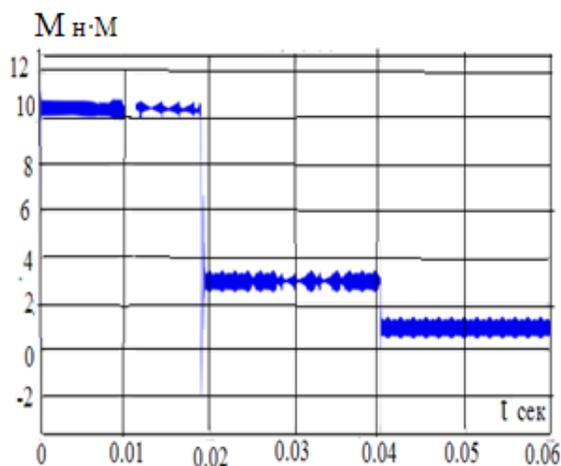


Рисунок 1. График $M=f(t)$, СДПМ

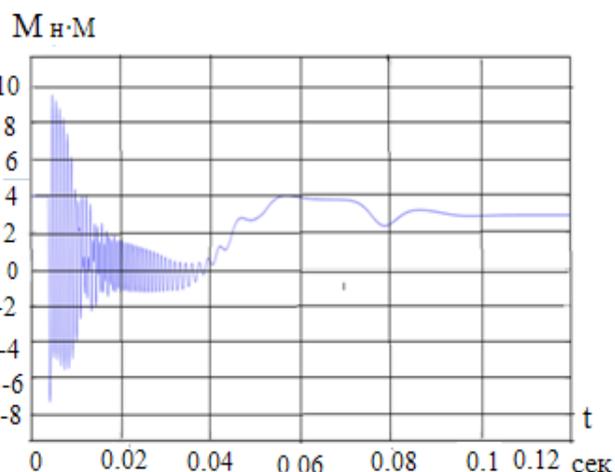


Рисунок 2. График $M=f(t)$, СД

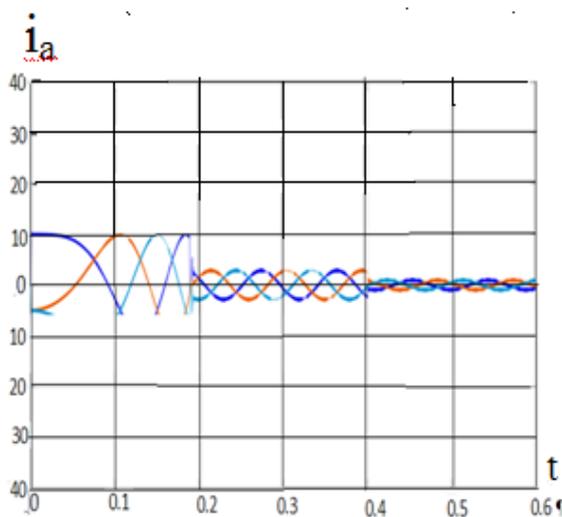


Рисунок 3. График $i_a(t)$, СДПМ

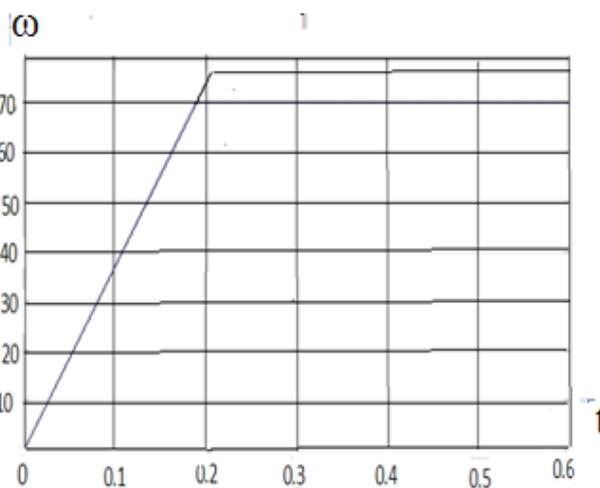
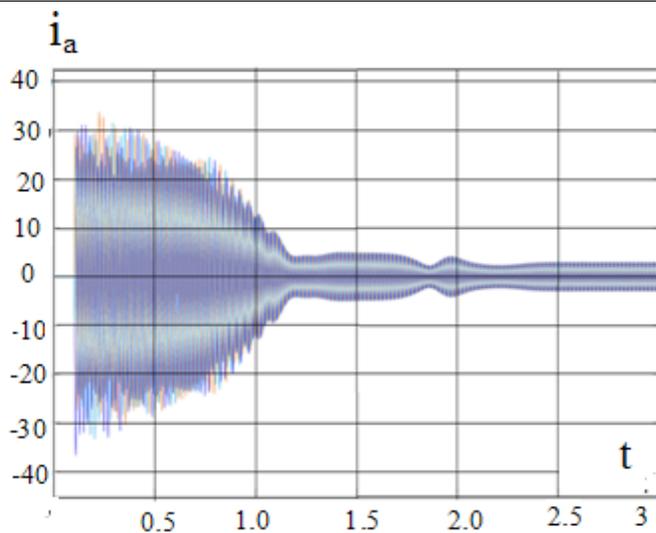
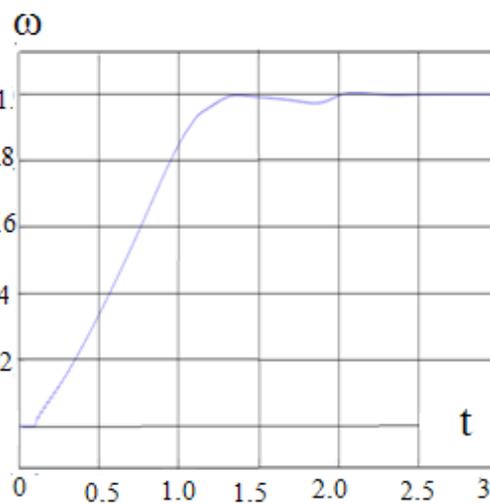


Рисунок 4 - График $\omega=f(t)$, СДПМ

Рисунок 5. График $i_a(t)$, СДРисунок 6. График $\omega=f(t)$, СД

Примечание: поскольку у синхронных двигателей используется асинхронный пуск, то пусковые характеристики при скольжениях S от 1 до $S_{кр}$ для АД и СД идентичны.

Список литературы

1. Шаньгин Е.С. shangin@ungm.ru: Перспективы использования регулируемого электропривода в нефтегазовой промышленности.
2. Приводы нефтегазовой отрасли: примеры, применения: neftegaz-expro.ru
3. Любицкий А.М., Маричев А.А., Мицней И.М., Чебанов К.А. Анализ и исследование способов оптимизации пусковых режимов асинхронных приводов с автономными источниками питания: Sciences of Europe, VOL 1. №21(21). Praha, Czech Republic.
4. Анализ возможности использования синхронных двигателей с постоянными магнитами на

предприятиях энергетики / Любицкий А.М., Любицкий М.В., Чебанов К.А. // EESJ-East European Science Journal (Warsaw, Poland #11(39),2018 part 2 –Printed in the «Jerolimskie 85/21,02-001-Warsaw, Poland». E-mail: info@eesa-journal.com; <http://eesa-journal.com/>

5. Каталог моделей Duneo–UnidriveM - LSRPM – PLSRPM [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.leroy-somer.com/_popup/en/downloads/catalogues/?id=3909

6. Описание продукции электродвигателей типа ФЭДС [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://izhdrill.ru/assets/files/production/tehopisanie_elektrodvigateli.pdf

7. Matlab/Examples/Simscape Power Systems/Permanent Magnet Synchronous Machine

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Abdulkhayeva Z.T.

Master's Degree student

Kazakh National Research Technical University after K.I. Satbayev

Penkin O.M.

Doctor of Math and Physics Sciences, professor

Kazakh National Research Technical University after K.I. Satbayev

THE MEAN VALUE THEOREM FOR LAPLACIAN ON THE GRAPH

Summary: This article deals with the problem of the mean value theorem for harmonic functions, defined on some given domain. Analysis of recent studies has been conducted. That allowed us to replace the classical metric sphere by so-called probabilistic sphere and the harmonic functions were the limits of the discrete functions, which describe the Brownian motion on the graph. The advantage of the described theory is that it can be devoted to the graph of arbitrary structure, and further it will be developed to the arbitrary stratified set. Several numerical experiments were made to demonstrate feasibility of our method.

Keywords: the mean value theorem, harmonic function, geometric graph, random walk, probabilistic sphere.

Introduction

The theory of the ordinary differential equations on graphs (on stratified sets in more general context) has begun its development in 80-th years of last century in the works of Покорный Ю.В., Павлов Б.С., Фадеев М.Д., G. Lumer and others. Some significant results had been achieved to the present moment: the questions of solvability of the boundary value problems on graphs, the elements of spectral theory had been constructed.

Graph G is defined to be a connected subset of R^d consisting of a finite collection of points v_1, v_2, \dots, v_k called vertices and some open intervals e_i connecting this vertices called edges. This graph is supposed to be divided into two parts: G_0 and ∂G_0 . ∂G_0 consists of the

vertices of multiplicity one (multiplicity means the number of edges adjoining to this vertices).

Sub-graph G' is defined to be an open and connected subset of G . Sub-graph $G' \subset G$ has the interior vertices only from G_0 , i.e. every interior vertex of sub-graph is also interior for graph G . There is another situation for boundary vertices of G' . Let e_i is an edge, which contain $X_0 \in \partial G'$, then it belongs to the sub-graph G' not all, but with one-piece cutting-of X_0 . It is the main difference between our definition of sub-graph and algebraic interpretation. [1]

If the edges admit a sufficiently smooth parametrization and do not have self-intersections, we can assume that they are rectilinear intervals. Thus, it is convenient for us to assume that G_0 consists of some set of disjoint intervals

$$e = \{X \in \mathbb{R}^d: X = v_i + t \frac{v_j - v_i}{\|v_j - v_i\|}; 0 \leq t \leq l\}$$

where l equals the length of the edge e . The value of the parameter t , corresponding to the point $X \in G$, may be interpreted as a coordinate of the point X . Using this parametrization we can interpret a restriction $u|_e(X)$ of the function $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ as a function $u_e(t)$ of numerical argument defined by

$$u_e(t) = u|_e(\pi(t))$$

where $\pi: t \rightarrow X$ is a coordinate mapping. Using this numerical representation, we can define the derivative $u'(X)$.

The differentiation of the function $u(X): G \rightarrow \mathbb{R}$ inside the some edge e is done by the natural parameter, besides it is assumed that the orientation is chosen for this edge (one of two possible directions). For example, on the edge $e = (a, b)$ with orientation 'from b to a' the derivative $\frac{du}{dx}(X)$ is defined like

$$u'(X) = \frac{d}{dt} u_e(t) = \frac{d}{dt} u \left(b + t \frac{(a - b)}{\|a - b\|} \right)$$

If we change the orientation, the sign of u' will change to the opposite. However, the sign of the second derivative u'' is not depend from the orientation of the edge.

The harmonic function on the graph is a solution of equation

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ on each edge} \\ \sum u'_v = 0 \text{ on internal vertices} \end{cases}$$

The first equation means, that the function u is a linear function. The second one- the sum of the directional derivatives (orientation is from the given vertex to the opposite one) is zero. In addition, we can take some values of function at boundary vertices. If, for example, take $u_{\partial G_0} = 0$, then we will get a zero solution. Let us take non-zero values of u on boundary, and then we will get a Dirichlet problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ on each edge} \\ \sum u'_v = 0 \text{ on internal vertices} \\ u(v_i) = \alpha_i \text{ on boundary vertices} \end{cases}$$

Consider the solution of Dirichlet problem u_i , which equals

$$\begin{cases} u = 1 \text{ on } v_i \\ u = 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

One easily can be see that u_i is a solution of the initial problem. If we multiply it to α_i , the new combination will be the solution of described above Dirichlet problem. On the other side, the solution u_i has a probabilistic point of view. Let particle begins it motion at the point $X_0 \in G_0$. What is probability of particle to achieve some fixed boundary vertex, assuming that other boundary vertices are absorbing? The function u_i may be interpreted as a solution to this kind of problem: particle starts at the point $X_0 = v$, i.e. the probability to achieve vertex v is one and particle is absorbed instantly. Particle starts at another vertex $v_1 \neq v$, i.e. it has never achieved vertex v , because it will be absorbed, and that is why the probability is zero. And so on.

Analysis of recent research and publications

Let Ω be a domain in \mathbb{R}^n and u is a $C^2(\Omega)$ function. The Laplacian of u , denoted Δu , is defined by

$$\Delta u = \sum D_{ii}u = \text{div} \nabla u$$

The function u is called harmonic (subharmonic, super harmonic) in Ω if it satisfies there

$$\Delta u = 0 (\geq 0, \leq 0) \quad [3]$$

The first result, related to our theme, belongs to C.F.Gauss. It claims that if u is a harmonic function in the domain $G \subset \mathbb{R}^n$, i.e. the function satisfies the equation $\Delta u = 0$, then for each ξ in the domain and the ball $B_r(\xi) \subset G$ centered at ξ the following formulas are hold:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r} u(x) dl \\ u(\xi) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\xi)} u(x) dS \\ u(\xi) &= \frac{3}{4\pi r^3} \int_{B_r(\xi)} u(x) dV \end{aligned}$$

In general case we can comprises the well-known mean value properties of harmonic, subharmonic and super harmonic functions.

Theorem Let $u \in C^2(\Omega)$ satisfy $\Delta u = 0 (\geq 0, \leq 0)$ in Ω . Then for any ball $B = B_R(y) \subset \subset \Omega$, we have

$$\begin{aligned} u(y) &= (\leq, \geq) \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u ds, \\ u(y) &= (\leq, \geq) \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u dx \end{aligned}$$

where ω_n is volume of unit ball.

For harmonic functions theorem thus asserts that the function value at the center of the ball B is equal to the integral mean values over both surface ∂B and B itself. These results, known as the mean value theorems, in fact also characterize harmonic functions. [3]

Because of importance of Gauss theorem, the several repeated attempts were made to generalize it. An analogue of the Gauss theorem for the harmonic functions on stratified sets has been obtained in work of E.Г.Гоц, O.М.Пенкин in 90-th of the last century. A stratified set Ω (fig. 1) is defined to be a connected subset of \mathbb{R}^n , consisting of a finite number of smooth manifolds (strata) σ_{kj} adjacent to each other according the following rules:

- 1) For all couples σ_{kj}, σ_{ml} either $\sigma_{kj} \cap \sigma_{ml} = \emptyset$ or $\sigma_{kj} \cap \sigma_{ml}$ consists of strata.
- 2) The boundary $\partial \delta_{kj} = \sigma_{kj}^- \setminus \sigma_{kj}$ consists of strata.
- 3) If $\sigma_{kj} > \sigma_{k-1j}$ and $Y \in \sigma_{k-1j}$, then $T_x \sigma_{kj}$ (tangent space) has a limit position (as $X \rightarrow Y$) containing $T_y \sigma_{k-1j}$.

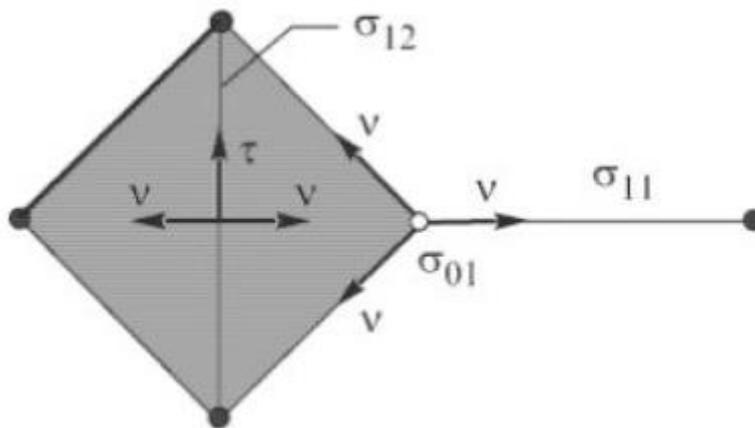


Fig. 1. Example of the stratified set

Many Laplacians Δ_p can be determined on stratified set. Harmonic functions in mean of this Laplacians have some properties similar to the properties of simple harmonic functions in the domain of Euclidean space, but there is also significant differences. Roughly speaking, there are two extreme cases of Laplacians - soft and hard. The soft Laplacian is closer in its properties to the classical one, than the hard one. In the last decade, interest in equations on stratified sets has steadily increased. Their systematic study began with a one-dimensional case by the works of G. Lumer and Yu. V. Pokorniy. Multidimensional problems began to be studied by S. Nicaise, W. Zhikov. [4]

Let $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ and $r_0(X)$ is the minimum of distances from point X to $(k - 1)$ -dimensional stratum, which do not contain X in their closure, and let $B_r(X)$ be a ball in \mathbb{R}^n . Let the set $\mathfrak{N}_r(X) = B_r(X) \cap \Omega$ will be called a stratified ball for $r < r_0$. Define $\mathfrak{J}_{B_r(X)}(u)$ as the weight average

$$\mathfrak{J}_{B_r(X)}(u) = \frac{\int_{B_r(X)} p u d\mu}{\int_{B_r(X)} p d\mu}$$

of the function u for the ball $\mathfrak{N}_r(X)$ and $\mathfrak{J}_{\partial B_r(X)}(u)$ as similar average for the corresponding stratified sphere. Then there is the following statement:

Theorem Let $u \in C^2(\Omega_0)$ is a p -harmonic function. Then

$$\mathfrak{J}_{B_r(X)}(u) = \mathfrak{J}_{\partial B_r(X)}(u) = u(X)$$

However, in the work of E.Г.Гоц, O.М.Пенкин the mean value theorem has proved only for the stratified balls of so-called ‘allowable radius’. If we are dealing with the graph, the definition ‘allowable radius’ means that it cannot exceed the distance from the center to the nearest vertex. In this case, sphere is defined metrically as the set of points equidistant from a given point (for example, center of a ball) to a distance, which is not exceeding a fixed positive number.

Presentation of the main material

Here we give a probabilistic interpretation of the following Dirichlet problem for Laplacian Δ on graph G :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ on } G \\ u|_{\partial G_0} = \varphi \text{ (function)} \end{cases}$$

where Δ acts on functions in $C^2(G)$ as follows:

$$\Delta u = \begin{cases} u'' \text{ on edges} \\ \sum_{e_i > v} u'_{v_i} = 0 \text{ on internal vertices } v \end{cases}$$

here a notation $e_i > v$ means that the e_i is adjacent (attached) to the vertex v and $u'_{v_i}(v)$ stands for the directional derivative of u at the vertex v , correspond to internal direction ‘form v to the interior or e_i ’. In other words, v_i is a unit vector at the vertex v directed to another vertex of the edge e_i .

$C^2(G_0)$ denotes the set of all scalar valued functions, which are continuous on G_0 and have continuous derivatives up to order two on each edge.

Let denote by u_v the solution of the problem: what is the probability to attain from point X to some fixed vertex v , assuming that other vertices are absorbing. Then the well-known Dirichlet problem has the form

$$\begin{cases} \Delta u_v = 0 \\ u(v_0) = 1 \\ u(v) = 0, v \in G_0 \setminus \{v_0\} \end{cases}$$

Theorem The solution to the described Dirichlet problem on the graph has the form $u = \sum_{v \in \partial G_0} \varphi(v) u_v$.

Proof It is easily known that each harmonic function is a linear combination. In our case u_v is a harmonic function, $\varphi(v)$ is a fixed number, summing these we again get the harmonic function because of linear operator Δ . Our solution must satisfy the boundary conditions: at the vertex v_0 we get $u(v) = \varphi(v)$ and on the others- zero.

For arbitrary point X_0 fix the vertex v . Let $u_v^\delta(X_0)$ be a probability of point X_0 to achieve vertex v , assuming that all other boundary vertices are absorbing. In the limit, there is a continuous random walk ($\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, u_v^\delta \rightarrow u_v$). The function u_v equals

$$\begin{cases} 1 \text{ at the vertex } v \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Besides, this function is harmonic. Assume that particle begins its motion on the some edge at the point X_0 . Then

$$\begin{aligned} u_v^\delta(X_0) &= \frac{1}{2} u_v^\delta(X_0 + \delta) + \frac{1}{2} u_v^\delta(X_0 - \delta) \\ 0 &= \frac{1}{2} u_v^\delta(X_0 + \delta) - \frac{1}{2} u_v^\delta(X_0) - (u_v^\delta(X_0) - \frac{1}{2} u_v^\delta(X_0 - \delta)) \\ 0 &= \frac{1}{2} u_v^{\prime\delta}(X_0) \delta - \frac{1}{2} u_v^{\prime\delta}(X_0 - \delta) \delta \\ &\quad \frac{1}{2} u_v^{\prime\prime\delta}(X_0) \delta^2 = 0 \end{aligned}$$

Dividing last equation by $\frac{1}{2}$ and letting δ tends to zero we get the well-known harmonic function on the graph. Such assumptions might be applied to the case when particle begins from the some interior vertex (here sum of the directional derivatives will be zero).

We know that each harmonic function might be represented as a linear combination of

$$u = \sum_{v \in \partial G_0} c_i u_v$$

Therefore, it is sufficient to prove the mean value theorem for the function u_v , and then it will be true for arbitrary harmonic function.

The analogue of the mean value theorem for harmonic function on the graph

Theorem Let G' is a sub-graph in G and $X_0 \in G'$. $u_v(X)$ is a probability for Brownian particle starting its motion from the point X to achieve the vertex v (before being absorbed by another boundary vertex). Then

$$u_v(X_0) = p_1 u_v(v'_1) + p_2 u_v(v'_2) + p_3 u_v(v'_3) + \dots + p_k u_v(v'_k)$$

where v'_i are boundary vertices of G' , p_i denotes a probability for the particle starting its motion from X_0 of the first passage through the vertex v_i .

Corollary Let $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ and its sum is one, then v'_1, \dots, v'_k lies in probabilistic sphere and

$$u_v(X_0) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_v(v'_i)$$

Remark Probabilistic sphere does not depend of choosing v .

Main theorem Let u be a discrete harmonic function and G' is a probabilistic ball centered at X_0 . Then

$$u(X_0) = \frac{\sum_{i=1}^k u(v'_i)}{k}$$

Proof We know that

$$\begin{aligned} u(X_0) &= \sum_{v \in \partial G_0} u(v) u_v(X_0) = \sum_{v \in \partial G_0} u(v) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_v(v'_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{v \in \partial G_0} u(v) u_v(v'_i) \\ u(X_0) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u(v'_i) \end{aligned}$$

Conclusion

The article is devoted to develop the analogue of the mean value theorem for the harmonic functions on the graph. The results can be achieved using the simple

and universal methods, but we were interested in the methods, which later may be applied to stratified sets also. The mean value theorem for harmonic functions on stratified sets without 'allowable radius' of the

sphere is one of the interesting serious and perspective problems nowadays. It had be seen that instead of metric sphere at the Gauss theorem should be used so-called probabilistic sphere, and harmonic functions in this case are limits of the discrete functions which described the Brownian motions on the graph.

References

1. Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, «Дифференциальные уравнения на геометрических графах»

2. R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, 'On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics'
3. D. Gilbarg, N. Trudinger, 'Elliptic Partial Differential Equations of Second Order'
4. Е.Г. Гоц, О.М. Пенкин, «Теоремы о среднем для лапласианов на стратифицированном множестве»
5. E. Zauderer, 'Partial Differential Equations of Applied Mathematics'

Bovin A.A.

physics teacher, secondary school № 63, Krasnodar

Ivankova P.N.

student, secondary school № 63, Krasnodar

APPLICATIONS OF THE FRACTAL METHOD FOR DETERMINING THE LENGTH OF THE KUBAN COASTLINE IN THE KRASNODAR CITY REGION

Бовин Александр Александрович

учитель физики, средняя общеобразовательная школа № 63, г. Краснодар

Иванкова Полина Николаевна

учащаяся, средняя общеобразовательная школа № 63, г. Краснодар

ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ КУБАНИ В ЧЕРТЕ ГОРОДА КРАСНОДАРА

Summary: Using fractal theory, the formula for the length of the coastline of the Kuban River within the city of Krasnodar is obtained and its fractal dimension is determined. It was revealed that for the river bank coastline there is a limiting minimum size of the square grid cell size used in the processing of a satellite image, less than which the coastline fractality is not observed.

Аннотация: Пользуясь фрактальной теорией, получена формула длины береговой линии реки Кубань в черте города Краснодара и определена её фрактальная размерность. Выявлено, что для речного побережья существует предельное минимальное значение размера ячейки квадратной сетки, используемой в процессе обработки космического снимка, меньше которого фрактальность береговой линии не наблюдается.

Key words: fractal method, fractal length, coastline.

Ключевые слова: фрактальный метод, фрактальная длина, береговая линия.

Введение.

В настоящее время теория фракталов имеет широкое распространение и применяется во многих областях человеческой деятельности. В частности, для определения длины береговой линии. Полагая, что форма береговой линии представляет собой фрактал можно определить её фрактальную размерность и фрактальную длину. Решение подобных задач имеет большое практическое значение, поскольку позволяет оценить экономические затраты на строительство прибрежных коммуникаций, дорог и других сооружений. Фрактальный метод был использован, например, для определения длины береговой линии Норвегии [1], Великобритании [2,3], южного побережья Крыма [4]. В этих работах в качестве объекта использовалась морская береговая линия. Для речных береговых линий фрактальный метод не применялся. В частности, для береговой линии реки Кубань. Исходя из практических целей, в данном случае рассматривался только участок реки, входящий в черту города Краснодара.

Описание фрактального метода Е. Федера для измерения длины береговой линии.

Бенуа Мандельброт, работая в американской исследовательском центре ИВМ, проявлял свой интерес к приложениям математики в различных областях. В частности, его заинтересовала проблема измерения длины береговой линии Великобритании. Оказалось, что ответить на этот вопрос весьма затруднительно. Свои исследования Б. Мандельброт опубликовал в журнале «Science» в 1967 году [2]. В этой публикации рассматривается парадокс береговой линии, заключающийся в том, что её длина зависит от способа её измерения. Если оценка длины береговой линии осуществляется путём наложения на карту N равных отрезков длиной δ , то окажется, что чем меньше длина отрезка измерений, тем больше становится конечная измеряемая длина. При этом в случае стремления длины отрезка измерений к нулю значение длины береговой линии возрастает до бесконечности. Таким образом, чтобы говорить о длине береговой линии, нужны какие-то другие средства количественной оценки.

Для определения длины береговой линии Мандельброт воспользовался эмпирическим законом,

выведенным Льюисом Ричардсоном. Согласно этому закону, измеренная длина $L(\delta)$ различных географических границ является функцией шкалы измерения δ . Анализируя опытные данные из нескольких различных примеров, Ричардсон высказал предположение, что $L(\delta)$ может быть аппроксимирована функцией вида

$L(\delta) = A\delta^{1-D}$, (1) где A является положительной константой, а D является константой, называемой **фрактальной размерностью** [1].

Термины фрактальная размерность и фрактал были введены Мандельбротом в 1975 году [3], примерно через 10 лет после того, как он опубликовал свою статью о самоподобии побережья Великобритании. Фрактальная размерность – величина дробная и в данном случае, может быть больше или равна 1. При этом, береговая линия, если она выглядит гладкой, должна иметь размерность, близкую к 1, а чем более изрезанной она является, то тем ближе её размерность к значению 2. Ричардсон приводит в своих исследованиях в качестве примера размерность 1,02 для побережья Южной Африки и 1,25 — для западного побережья Великобритании. Таким образом, измерить длину береговой линии можно только приблизительно, задаваясь параметром δ , то есть длиной отрезка прямой, которым «сглаживают» изгибы побережья.

В 1988 г. норвежский ученый Енс Федер предложил другой способ измерения длины береговой линии Норвегии. Согласно этому способу, карту покрывали квадратной сеткой, ячейки которой имели размеры $\delta \times \delta$. Видно, что число $m(\delta)$ таких ячеек, которые покрывают береговую линию на карте, приближенно равно числу шагов, за которое можно обойти по карте береговую линию циркулем с раствором δ . Если δ уменьшать, то число $m(\delta)$ будет возрастать.

В своей книге [1] Е. Федер описывает методику определения фрактальной размерности D береговой линии при использовании квадратных сеток разного масштаба. В качестве основы для расчетов используется формула, где принято $L(\delta) = m\delta$, тогда

$$m\delta = A\delta^{1-D}. \quad (2)$$

Накладывая последовательно на исследуемую береговую линию квадратные сетки с размерами стороны $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, подсчитывается соответствующее число квадратов m_1, m_2, \dots, m_n . Число n различных сеток должно быть таким, чтобы по числу n точек можно было бы построить график. Разумно брать $n \geq 5$. Далее вводятся величины

$$x = \lg \delta, y = \lg(m\delta) \quad (3)$$

После вычислений получается n пар значений x и y , по которым строится график линейной функции $y = ax + b$. Так как точки с координатами (x, y) не всегда располагаются вдоль прямой, то с помощью метода наименьших квадратов производится линеаризация зависимости $y(x)$. Метод наимень-

ших квадратов позволяет рассчитать коэффициенты a и b в функции $y = ax + b$. Иначе эти коэффициенты можно определить непосредственно по графику $y(x)$.

Так как $L(\delta) = m\delta$, то $y = \lg(m\delta) = \lg L$. Тогда с учётом выражения (3) функцию $y(x)$ можно записать в виде

$$y = ax + b \Rightarrow \lg L = a \cdot \lg \delta + b \quad (4)$$

Потенцируя выражение (4) можно его преобразовать к виду

$$10^{\lg L} = 10^{a \cdot \lg \delta + b} \Rightarrow L = 10^b \cdot \delta^a \quad (5)$$

Сравнивая полученное выражение (5) с формулой (1), имеем

$$A = 10^b, a = 1 - D \quad (6)$$

Отсюда следует, что фрактальная размерность береговой линии

$$D = 1 - a \quad (7)$$

Используя описанный выше метод, Е. Федер рассчитал фрактальную размерность береговой линии Норвегии, которая составила $D=1,52$. Следует отметить, что побережье Норвегии сильно изрезано фиордами. А для береговой линии Великобритании, побережье которой имеет более гладкие контуры, фрактальная размерность составила всего $D=1,3$,

Вычисление фрактальной размерности береговой линии реки Кубани в черте города Краснодара.

Для выполнения намеченных измерений были выбраны спутниковые снимки города Краснодара, представленные в Интернете. Важной особенностью таких снимков является возможность регулировать область отображения и масштаб снимков в широком диапазоне. При этом на экране отображается масштабная линейка.

Вначале необходимо было условиться о границах участка реки Кубань, для которого предстояло провести вычисления. Выбрав соответствующий масштаб снимка, условились граничными точками считать: на востоке - место истока реки из Краснодарского водохранилища; на западе – середину излуины на границе станицы Елизаветинской (которая входит в состав Прикубанского округа города Краснодара). Эти границы отмечены на рис.1 дугообразной линией. Поскольку в данной зоне правый берег Кубани относится к Краснодару, а левый – к Республике Адыгея, то, естественно, все измерения в данной работе относятся только к правобережью реки.

Технология работы со спутниковыми снимками состоит в следующем. На космический снимок исследуемого берега наносилась квадратная сетка. Необходимый размер квадратной ячейки сетки устанавливался в соответствии с масштабным отрезком на снимке. В случае, когда линия исследуемого берега размещалась на нескольких

снимках, осуществлялась топографическая привязка положения сеток, так, чтобы снимки согласовывались между собой.

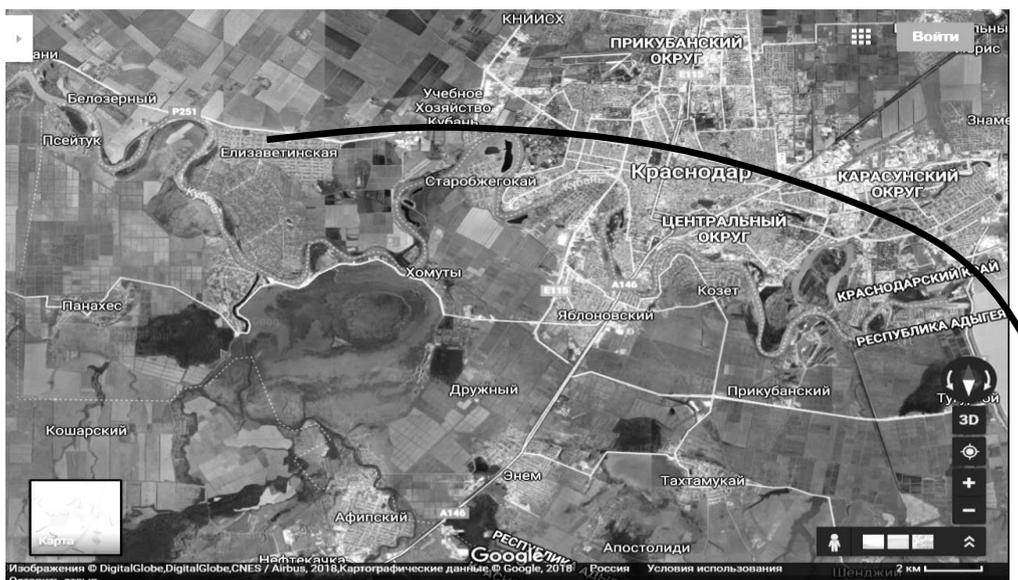


Рис.1. Спутниковая карта города Краснодара.

С помощью описанного способа были изготовлены и использованы квадратные сетки, имеющие следующий ряд размеров ячеек (в км): 4×4 ; 2×2 ; 1×1 ; $0,5 \times 0,5$; $0,2 \times 0,2$ и $0,1 \times 0,1$. По этим снимкам было посчитано суммарное число квадратов сетки m , которые пересекала береговая линия.

Исходя из найденных чисел квадратов m и размер ячейки сетки δ по формулам (3) были рассчитаны значения величин x и y и по этим данным составлена таблица 1.

Таблица 1.

δ , км	4	2	1	0,5	0,2	0,1
$x = \lg \delta$	1,301	1,000	0,699	0,398	0	- 0,398
m	12	27	62	147	324	597
$y = \lg(m\delta)$	1,681	1,732	1,792	1,866	1,812	1,776

Используя табличные данные, был построен график зависимости $y(x)$, приведённый на рис.2. На

графике имеется точка резкого излома, что нехарактерно для графиков такого рода [3,4].

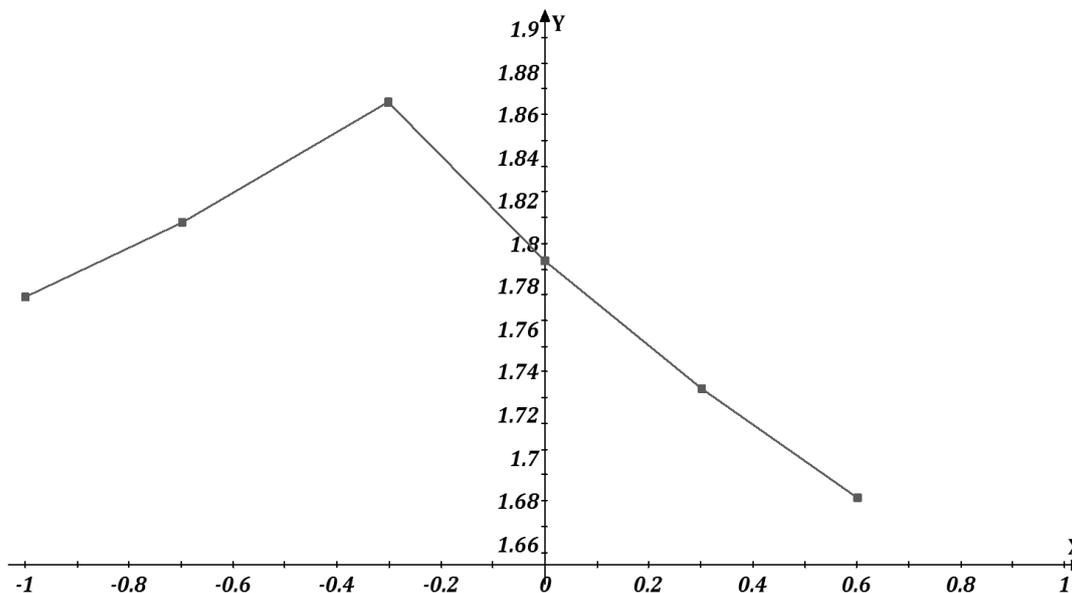


Рис.2. График зависимости $y(x)$.

Известно, что для идеальной фрактальной структуры график $y(x)$ должен быть в виде прямой с отрицательным наклоном. Однако природные объекты, в частности береговая линия реки, не являются идеальным фракталом, и поэтому график зависимости $y(x)$ будет отличаться от прямой в ту или иную сторону. Береговые линии морского побережья имеют более выраженную фрактальность. Так в работе [4] для расчёта фрактальной размерности береговой линии южного побережья Крыма график $y(x)$ получен в виде кривой, по форме близкой к прямой, поэтому эту кривую было легко линеаризовать с помощью метода наименьших квадратов.

Что же касается излома графика на рис.2, то это можно объяснить таким образом: при более мелком масштабе береговая линия становится столь гладкой, что исчезает её фрактальная структура и её фрактальная размерность стремится к 1.

Следовательно, для расчёта фрактальной длины береговой линии реки Кубань имеет смысл выбрать те участки графика, которые отражают фрактальный характер побережья. На рис.2 этому соответствует часть графика до излома, то есть линия, соединяющая четыре правых точки. Если воспользоваться таблицей 1, то это означает, что на участках берега Кубани длиной менее 500 м фрактальная структура побережья отсутствует. Поэтому для дальнейших расчётов фрактальной размерности береговой линии реки Кубань будем использовать значения таблицы 1 только для $\delta \geq 0,5$ км.

Для линеаризации графика $y(x)$ в указанных пределах был применён метод наименьших квадратов. Для этого была составлена таблица 2. Значения x_i и y_i взяты из таблицы 1, где номер сетки (опыта) $i = 1, 2, \dots, n$, а число используемых сеток $n = 4$.

Таблица 2.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.602	1.681	0.3624	1.01196
2	0,301	1.732	0.0906	0.52133
3	0	1.792	0	0
4	-0.301	1.866	0.0906	-0.56166
Σ	$\sum_i x_i = 0,602$	$\sum_i y_i = 7,071$	$\sum_i x_i^2 = 0,5436$	$\sum_i x_i y_i = 0.97163$

Результаты расчётов из таблицы 2 были подставлены в систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_i x_i \cdot a + nb = \sum_i y_i, \\ \sum_i x_i^2 \cdot a + \sum_i x_i \cdot b = \sum_i x_i y_i; \end{cases} \quad \begin{cases} 0.602a + 4b = 7,071, \\ 0.5436a + 0.602b = 0.97163. \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы линейных уравнений (8) даёт:

$$a \approx -0,20432, b \approx 1,79850.$$

Таким образом, уравнение линеаризованного графика согласно (4) принимает вид:

$$y = -0,20432x + 1,79850.$$

График линеаризованной зависимости $y(x)$ представлен на рис.3. Далее, следуя выражениям (5) – (7), были вычислены: коэффициент А

$$A = 10^b = 10^{1,79850} \approx 62,88 \text{ (км)}$$

фрактальная размерность исследуемой береговой линии

$$D = 1 - a = 1 - (-0,20432) = 1,20432 \quad (9)$$

получена формула фрактальной длины береговой линии

$$L = 62,88 \delta^{-0,20432} \quad (10)$$

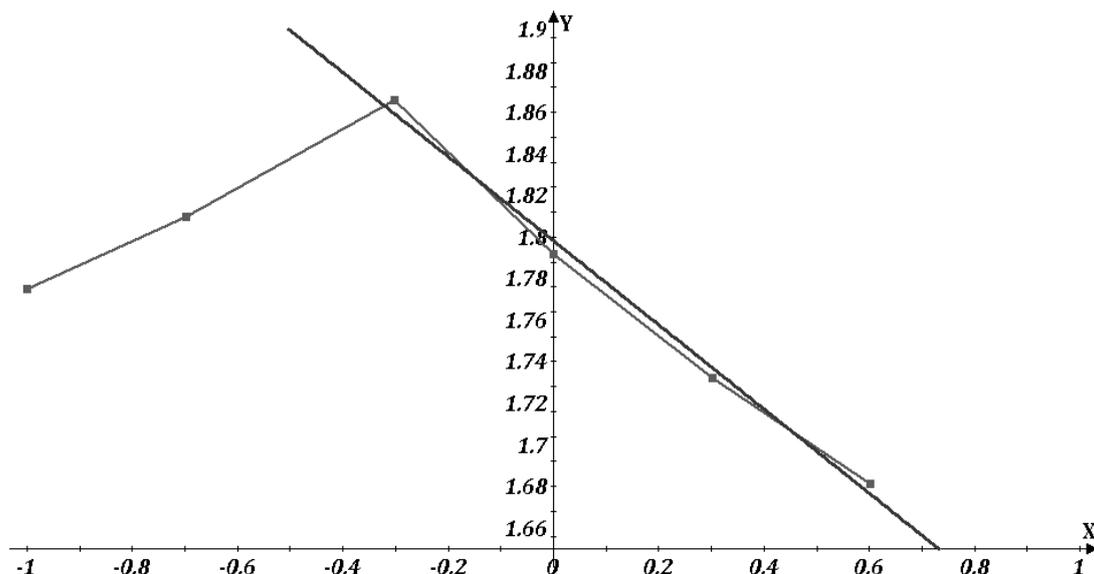


Рис.3. Линеаризованный график $y(x)$.

Выводы и практическая значимость полученного результата..

Анализируя выполненную работу и результаты проведённых расчётов можно сделать следующие выводы:

- впервые фрактальный метод Федерера применён для расчёта длины береговой линии речного побережья;
- выявлено, что для речного побережья существует предельное минимальное значение δ_{\min} размера ячейки квадратной сетки, меньше которого фрактальность береговой линии не наблюдается. Для реки Кубань $\delta_{\min} \approx 500$ м;
- получена формула фрактальной длины береговой линии правобережья реки Кубани в черте города Краснодара $L = 62,88 \delta^{-0,20432}$;
- вычислена фрактальная размерность береговой этой линии $D = 1,20432$, что свидетельствует о значительной извилистости береговой линии реки Кубань в километровых масштабах.

Берег реки Кубань в черте Краснодара ещё мало освоен. Только в центральной части города имеется укрепленная набережная, оснащённая уличным освещением, тротуаром и автомобильной дорогой вдоль берега. Остальное побережье реки ещё пребывает в первозданном виде. Поэтому результаты расчётов, полученных в данной работе, достаточно актуальны и имеют практическую значимость.

Заключение.

Понятие «фрактал», возникшее в середине 20-го века, в настоящее время не только широко известно, но и активно применяется в различных областях человеческой деятельности. В частности, определение фрактальной длины береговой линии океанов, морей, крупных озёр для многих морских государств имеет не только экономическое, но и политическое значение. Для речного побережья, если это не пограничная река, проблема определения фрактальной длины береговой линии актуальна только для крупных городов, в черте которых русло река достаточно извилисто. Данная работа является тому хорошим подтверждением.

Важный вывод об ограниченной фрактальности природных объектов, вытекающий из выполненной работы, необходимо учитывать при подобных вычислениях. Это может послужить темой для дальнейших исследований.

Список использованной литературы.

1. Федер Е. Фракталы / Пер. с англ. - М.: Мир, 1991.
2. Mandelbrot В.В. //Science. 1967. V. 156. № 3775. P. 636 – 638.
3. Мандельброт Б.Б. Какова длина побережья Британии? Статистическое самоподобие и фрактальная размерность. Арт-фрактал. Сборник статей/ пер. с англ., фр. – СПб.: «Страта», 2015.
4. Бовин А.А., Жуков Д.Е. Измерение длины береговой линии южного побережья Крыма методом фракталов. Вестник науки и образования, №5 (29), Том 2, 2017.

Moscovskiy S.B.

*doctor of physics and mathematics sciences, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University*

Sergeev A.N.

*senior lecturer,
P.G. Demidov Yaroslavl State University*

Sidorova Y.I.

*postgraduate,
P.G. Demidov Yaroslavl State University*

Marudov A.A.

*bachelor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University*

WAVELET ANALYSIS METHODS IN TASKS OF PROCESSING EXPERIMENTAL DATA

Московский Сергей Борисович

*доктор физико-математических наук, профессор
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

Сергеев Александр Николаевич

*старший преподаватель
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

Сидорова Екатерина Игоревна

*аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

Марудов Андрей Алексеевич

*бакалавр,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

МЕТОДЫ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Summary: The method of cleaning diffractograms from noise based on wavelet transformation is considered. A multi-level transformation of the original signal using the Daubechi and Simlet wavelets is used. The efficiency of using various algorithms for automatically determining the threshold in the MatLab environment has been investigated. Evaluation of the obtained results is based on comparison of the mean square error of the reconstructed and the original diffractogram, as well as on their visual comparison. Examples of filtering a diffractograms by the proposed method are given.

Аннотация: Рассмотрен метод очистки дифрактограмм от шума на основе вейвлет-преобразований. Использовано многоуровневое преобразование исходного сигнала с помощью вейвлетов Добеши и Симлета. Исследована эффективность различных алгоритмов автоматической пороговой обработки коэффициентов разложения в среде MatLab. Оценка полученных результатов проводится на основе сравнения среднеквадратической погрешности восстановленной и исходной дифрактограммы, а также на основе визуального сравнения указанных дифрактограмм. Приведены примеры фильтрации дифрактограмм предлагаемым методом.

Key words: wavelet analysis, thresholding, denoising, MatLab, Wavelet Toolbox.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, трешолдинг, шумоочистка, MatLab, Wavelet Toolbox.

Постановка проблемы.

Характерной особенностью задач, требующих обработки значительного объема данных, являются большая множественность событий и высокий уровень шума. В настоящее время появился новый метод борьбы с шумом на основе алгоритмов развивающейся теории вейвлетов. Он основан на многоуровневом одномерном дискретном вейвлет-разложении исходного сигнала до N-го уровня (глубины) и последующей программно-управляемой пороговой обработке детализирующих коэффициентов разложения. Такой метод получил название трешолдинг (ТШ).

Так как вейвлет-преобразование обладает свойством избыточности, это позволяет без потери

информации "отсекать" частично или полностью вейвлет-коэффициенты определённого уровня. Составляющие шума переносятся на высоких частотах и наиболее четко проявляются в коэффициентах детализации нижних уровней декомпозиции сигнала. К ним необходимо применить пороговую обработку, таким образом, производится удаление достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом.

Процедура удаления шума выполняется с использованием ортогональных вейвлетов и включает в себя следующие операции [1]:

1. Вейвлет-разложение сигнала до уровня N. Значение уровня N определяется частотным спек-

тром информационной части сигнала, которую желательно оставлять в рядах аппроксимирующих коэффициентов. Тип и порядок вейвлета может существенно влиять на качество очистки сигнала от шума в зависимости как от формы сигналов, так и от корреляционных характеристик шумов.

2. Задание типа и пороговых уровней очистки по известным данным о характере шумов или по определенным критериям шумов во входном сигнале. Пороговые уровни очистки могут быть гибкими (в зависимости от номера уровня разложения) или глобальными.

3. Модификация коэффициентов детализации вейвлет-разложения в соответствии с установленными условиями очистки.

4. Восстановление сигнала на основе коэффициентов аппроксимации и модифицированных детализирующих коэффициентов.

После данной обработки восстановленный сигнал с высокой точностью соответствует сигналу без шумовой составляющей, что позволит существенно уменьшить погрешность локализации пиков и значительно упрощает дальнейший анализ.

Задачей настоящей работы является численное исследование влияния параметров трешолдинга и способов пороговой обработки на качество шумоподавления. В качестве материала для обработки были взяты данные образцов пленок V-O (рис. 1), полученные на дифрактометре ARL X'TRA (Thermo Scientific - Швейцария, 2009), находящемся в ЦКП ДМНС.

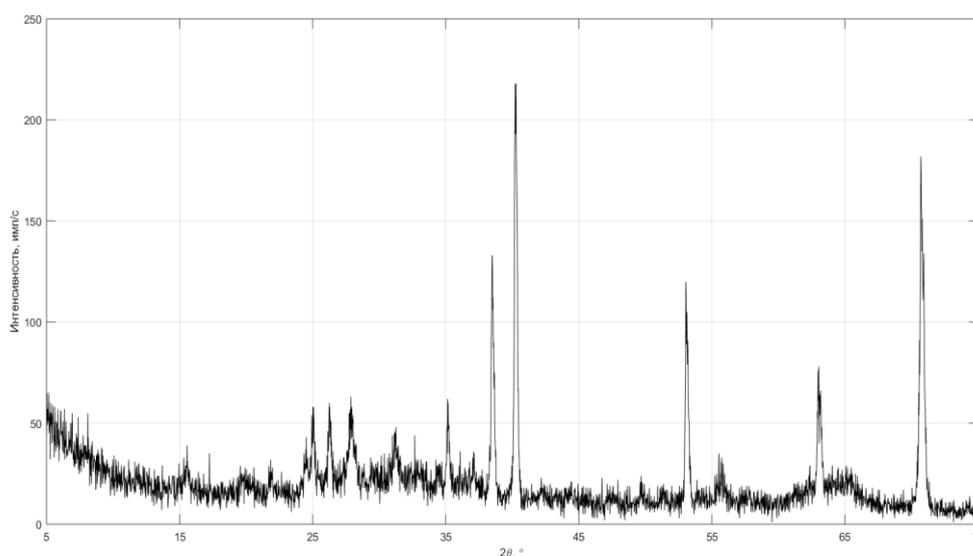


Рисунок 1. Дифрактограмма пленок V-O

Декомпозиция сигнала осуществлялась вейвлетами Добеши и Симлета пятого порядка, так как они не искажают исходную информацию, содержащуюся в дифрактограмме и имеют минимальные значения среднеквадратического отклонения. Было принято решение ограничить декомпозицию 5-м уровнем исходя из того, что 95% информации сигнала содержится именно на первых 5 уровнях, обеспечивается оптимальное соотношение затрачиваемых ресурсов и выполнения поставленных перед нами целей.

Алгоритмы пороговой обработки.

Всего было рассмотрено три алгоритма, представленных в пакете расширения Wavelet Toolbox компьютерной системы MATLAB.

Алгоритм ТШ-1. Первый и самый простой из них – это применение параметров по умолчанию. Эта процедура реализуется следующими функциями [2]:

```
[thr, sorh, keepapp]=ddencmp('den', 'wv', s);
[sd, cd, ld, p0, pl2]=wdencmp('gbl', s, wname, N, thr, sorh, keepapp).
```

Первая задает параметры по умолчанию:

- глобальный порог $thr = \sqrt{2 \ln L} \cdot E$, где L – длина сигнала, E – уровень шума;
- аппроксимирующие коэффициенты не подвергаются ТШ ($keepapp=1$);
- «мягкий» пороговый метод ($sorh='s'$).

Вторая, используя полученные параметры, производит очистку сигнала заданным вейвлетом (переменная $wname$).

Алгоритм ТШ-2. Следующим был рассмотрен алгоритм определения порога по стратегии Бирге-Массарта [3]. Его применение сводится к отбрасыванию на i -ом уровне всех коэффициентов, кроме n_i самых больших. Их число определяется выражением:

$$n_i = \frac{m}{(j + 2 - i)^\alpha} \quad (1)$$

где j – уровень разложения, m и α параметры.

В MATLAB операция вычисления порога и последующей обработки имеет вид [2]:

```
[c, l]=wavedec(s, N, wname);
[thr, nkeep]=wdbcmb(c, l, alpha, m);
[sd, cd, ld, p0, pl2]=wdencmp('lvd', s, wname, N, thr, sorh).
```

Наилучшего результата удастся добиться при применении «мягкого» порогового метода и значениях параметров $\alpha=1,5$, $m=2L(1)$ ($L(1)$ – число коэффициентов на первом уровне разложения).

Алгоритм ТШ-3. Еще один вариант обработки использует адаптивный порог, который задается путём выбора критерия оценки R в качестве которых используются [4]:

- *rigrsure* – адаптивный порог, использующий принцип Штейна несмещённой оценки риска [5];
- *sqtwolog* – порог, аналогичный используемому по умолчанию;
- *heursure* – эвристический вариант порога;
- *minimaxi* – минимаксный порог.

Решающая программная функция алгоритма имеет вид:

$sd=wden(s, R, sorh, scal, N, wname)$

Переменная *scal* определяет тип перемасштабирования шума, которое применяется в случае отклонения его структуры от модели "белого" в интервале

[0, 1]. Параметр имеет следующие текстовые значения:

- *'one'* – без масштабирования;
- *'sln'* – перемасштабирование с использованием единственной оценки уровня шума на основании коэффициентов разложения первого уровня;
- *'mln'* – перемасштабирование с использованием оценок уровня шума, зависящих от уровня.

Из всех критериев R в алгоритме ТШ-3, наиболее подходящим для нашей задачи оказался минимаксный. Логарифмический критерий практически полностью аналогичен тому, что используется по умолчанию. Критерии эвристический и *'rigrsure'* для нашего сигнала не имеют различий, и дают результат гораздо более зашумленный, чем при использовании минимаксного. Что касается типа перемасштабирования шума, оптимальным решением будет использовать *sln*-перемасштабирование, так как *mln* искажает исходную форму пиков, а результат обработки без применения масштабирования является слишком зашумленным.

Анализ результатов обработки.

Из всех рассмотренных способов выбора порога, наиболее подходящим для нашей задачи оказался алгоритм адаптивного трешолдинга с минимаксным критерием оценки и использованием перемасштабирования шума на основе коэффициентов первого уровня разложения. Обработка с использованием этого порога позволила избавиться от большей части шума без образования лишних изгибов и искажения формы пиков.

Теперь проанализируем отличия результатов обработки вейвлетами Добеши и Симлета. Общая картина не имеет существенных различий, но при увеличении (рис. 2) становится ясно, что использование вейвлета Добеши лучше сохраняет форму пиков, что может сказаться на корректном определении максимумов.

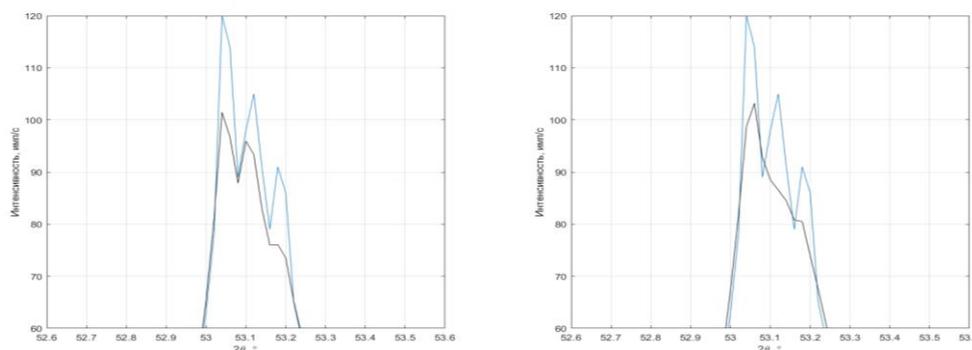


Рисунок 2. Форма пиков после обработки вейвлетами Добеши (слева) и Симлета (справа), алгоритм ТШ-3, $R=minimaxi$, масштабирование шума *sln*

На рис. 3 представлена восстановленная дифрактограмма после очистки от шумовой составляющей. Сравнивая ее с исходной, можно сделать вывод, что обработка по методу ТШ позволила избавиться от большей части шума без образования лишних изгибов и искажения формы пиков.

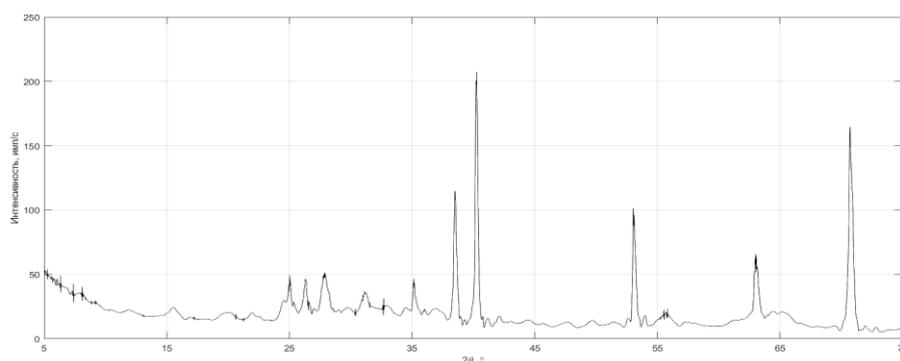


Рисунок 3. Дифрактограмма пленок V-O после обработки

Заключение.

Проведено исследование эффективности различных алгоритмов автоматического определения порога для удаления шума с дифрактограмм методом трешолдинга. Сравнение качества фильтрации каждого из них показало, что алгоритм адаптивного трешолдинга с минимаксным критерием оценки проявляет себя лучше остальных при обработке дифрактограмм.

Вейвлет-фильтрация, как современная методика компьютерной обработки данных, позволила уменьшить влияние высокочастотного шума и неоднородной фоновой интенсивности на форму дифракционных максимумов, полученных от тонких плёнок V-O. Такой подход значительно упрощает дальнейший анализ дифрактограмм и существенно повышает точность определения характеристик исследуемых плёнок.

Список литературы:

1. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.
2. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2014. – 628 с.
3. Birgé, L.; P. Massart, "From model selection to adaptive estimation," in D. Pollard (ed), Festschrift for L. Le Cam, Springer, pp. 55–88, 1997.
4. Алексеев К.А. Теория и практика шумоподавления в задаче обработки сейсмоакустических сигналов: Электронный ресурс // http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/wavelet/
5. D.L. Donoho, "De-Noising by Soft Thresholding", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 41, No. 3, pp. 613-627, 1995.

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы

*доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет*

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В
ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu

*Doctor of Physikal and Mathematical Sciences, Professor
Baku State University*

**NECESSARY CONDITION OF AN EXTREMUM OF THE FIRST AND SECOND ORDER IN A
LOCALLY CONVEX SPACE**

Аннотация: В работе установлены необходимые условия экстремума первого и второго порядков для негладких экстремальных задач при наличии ограничений в локально выпуклом пространстве. В линейном пространстве определены $S-(\beta, \delta)$ и $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевые отображения в точке и используя класс $S-(o(\beta), \delta)$ и $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ локально липшицевые отображения в точке, получены необходимые условия экстремума при наличии ограничений.

Abstract: The necessary first and second-order extremum conditions are obtained for nonsmooth extremal problems with constraints in a locally convex space. In a linear space $S-(\beta, \delta)$ and $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ locally Lipschitz mappings at a point are defined and using the classes $S-(o(\beta), \delta)$ and $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ locally Lipschitz mappings at a point, necessary conditions of the extremum are received for extreme problems in the presence of restrictions.

Ключевые слова: сублинейная функция, липшицевая функция, отображение, локальный минимум.

Key words: sublinear function, Lipschitz function, map, local minimum.

1. Вспомогательные результаты

Пусть X и Y векторные пространства, $|x|_1 : X \rightarrow R$ и $|y|_2 : Y \rightarrow R$ положительно однородные неотрицательные функции (например, нормы или полунормы в X и Y соответственно).

Пусть $C \subset X$, $F : X \rightarrow Y$, $S : X \rightarrow Y$, $f : X \rightarrow R$, $\varphi : X \rightarrow R$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \geq \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $o : R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $R_+ = [0, +\infty)$. Положим $B = \{z \in X : |z|_1 \leq 1\}$.

Отображение F назовем $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$ с постоянной K в точке $\bar{x} \in X$, если F удовлетворяет условию

$$|F(\bar{x} + x + z) - F(\bar{x} + x) - S(x + z) + S(x)|_2 \leq K|z|_1^\nu (|x|_1^{\beta-\alpha\nu} + |z|_1^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}) + o(|x|_1^\beta)$$

при $x, z \in X$, $|x|_1 \leq \delta$, $|z|_1 \leq \delta$ [1],[2]. Если $o(t) \equiv 0$, то отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевым относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$ с постоянной K в точке \bar{x} . Если $\omega(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$.

Далее считаем, что $S(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$ (если $S(0) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\tilde{S}(x) = S(x) - S(0)$) и если $F(x) = f(x)$, то считаем, что $S(x) = \varphi(x)$. Если существует функция $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$$|F(\bar{x} + x) - F(\bar{x}) - S(x)|_2 \leq o(|x|_1^\beta)$$

при $x \in X$, $|x|_1 \leq \delta$, т.е. $x \in \delta B$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S - (o(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке \bar{x} относительно пары $(|x|_1, |y|_2)$.

Если существует функция $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что $f(\bar{x} + x) - f(\bar{x}) - \varphi(x) \leq o(|x|_1^\beta)$

при $x \in X$, $|x|_1 \leq \delta$, то функцию f назовем $\varphi - (o(\beta), \delta)$ локально верхней полу-липшицевой в точке \bar{x} относительно $|x|_1$.

Рассмотрим важный случай введенных определений. Будем считать, что $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, где $S_j: X \rightarrow Y$ положительно однородный степени j оператор, а $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$, где $\varphi_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородная степени j функция, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Касательным конусом к C в точке x_0 называется множество (см.[3]), состоящее из всех векторов $v \in X$ таких, что для каждой окрестности V вектора v в X найдется окрестность U точки x_0 в X и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(x + tV) \cap C \neq \emptyset$ при $x \in U \cap C$ и $t \in (0, \varepsilon)$. Касательный конус к множеству C в точке $x_0 \in C$ обозначается через $T_C(x_0)$.

Отметим, что $T_C(x_0) = \liminf_{x \rightarrow_C x_0, t \downarrow 0} \frac{1}{t}(C - x)$, где $x \rightarrow_C x_0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$ и $x \in C$. Положим

$N_C(x_0) = T_C(x_0)^- = \{p \in X^* : \langle p, x \rangle \leq 0 \text{ при } x \in T_C(x_0)\}$. Если $C \subset X$ выпуклое множество, то

$$T_C(x_0) = \text{cl} \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda} \quad (\text{см.}[4]).$$

Пусть $C \subset X$, $x_0 \in C$. Вектор $v \in X$ называется гиперкасательной к множеству C в точке $x_0 \in C$, если найдется окрестность U точки x_0 , окрестность V вектора v и число $\varepsilon > 0$ такие, что $U \cap C + (0, \varepsilon)V \subset C$. Множество всех гиперкасательных к множеству C в точке $x_0 \in C$ обозначается через $I_C(x_0)$ ([3, с.267]).

Пусть X - банахово пространство. Если $C \subset X$ выпуклое множество, $\text{int } C \neq \emptyset$ и $x_0 \in C$, то из предложения 4.1.6[4] имеем, что $\text{int } T_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{\text{int } C - x_0}{\lambda}$. Кроме того из леммы ([5], с.95) следует, что

$I_C(x_0)$ непусто. Тогда из теоремы 2.4.8[5, с.59] следует, что $\text{int } T_C(x_0) = I_C(x_0)$.

Если $C \subset X$ выпуклое множество и $x_0 \in C$, то положим $T_C(x_0) = \text{cl} S_C(x_0)$, где

$$S_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda} \quad (\text{см.}[4, с.167]). \text{ Обозначим } \tilde{C} = \text{int } C \cup \{x_0\}, S_{\tilde{C}}(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{\tilde{C} - x_0}{\lambda}.$$

Отметим, что если X нормированное пространство, $\text{int } C \neq \emptyset$ и C выпуклое множество, то по предложению 4.1.7[4, с.170] имеем $T_C(x_0) = \text{cl}S_C(x_0)$. Если X отделимое локально выпуклое пространство, $\text{int } C \neq \emptyset$ и C выпуклое множество, то из теоремы 5.2.1([6],с.447) следует, что $T_C(x_0) = \text{cl}S_C(x_0)$.

Пусть $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Вектор X называется возможным направлением множества C в точке x_0 , если найдутся окрестность U точки x_0 и число $\alpha_0 > 0$ такие, что $z + \alpha x \in C$ для любого $z \in C \cap U$ и $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Совокупность всех возможных направлений в точке x_0 множества C обозначим через $H(x_0; C)$ [3].

Пусть $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Вектор X называется допустимым направлением множества C в точке x_0 , если найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что $x_0 + \alpha x \in C$ для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Совокупность всех допустимых направлений в точке x_0 множества C обозначим через $\gamma(x_0; C)$.

Теорема 1.1[7]. Если X и Y пространства Фреше, $C \subset X$ выпуклое множество и $\text{int } C \neq \emptyset$, $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, выпуклые непрерывные функции, $\Lambda : X \rightarrow Y$ непрерывный линейный оператор, $Ax = \Lambda x + \bar{y}$, $\bar{y} \in Y$, $\text{Im } \Lambda = Y$ и система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, $Ax = 0$ не имеет решения в C , то существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ и вектор $y^* \in Y^*$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0$ при $x \in C$.

Теорема 1.2[7]. Пусть X линейного пространства, $C \subset X$ выпуклое множество, $C \neq \emptyset$, $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, выпуклые функции и система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, не имеет решения в C . Тогда существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \geq 0$ при всех $x \in C$. Положим $g(y, a) = \inf_{x \in T, \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$.

Лемма 1.1[8]. Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $e(x, a) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$, где $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный сюръективный оператор, T выпуклый замкнутый конус, $\text{int } T \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$ и $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \text{int } T \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$. Тогда $(y^*, b) \in \partial g(0, 0)$ в том и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что $-\Lambda^* y^* \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i(0) + N$ и $b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Из леммы 1.1 следует, что

$$\partial g(0, 0) = \{(y^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i(0), x^* \in N, y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

Лемма 1.2[7]. Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный оператор, $\text{Im } \Lambda = Y$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, T выпуклый замкнутый конус, $\text{int } T \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$. Тогда задача $\inf_{x \in T, \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$ имеет решение в том и только в том случае, когда существуют элементы $z_1^* \in \text{dom } \varphi^*$, $z_2^* \in (\text{Ker } \Lambda)^\perp$ и $z_3^* \in N = T^-$ такие, что $z_1^* + z_2^* + z_3^* = 0$ и $\partial h_1^*(z_1^*) \cap \Lambda^{-1}(-y) \cap \partial \delta_N(z_3^*) \neq \emptyset$, где $\varphi(x) = \max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x)$, $h_1(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i)$.

2. Необходимое условие в терминах верхней аппроксимации

Пусть X отделимое локально выпуклое пространство, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $C \subset X$, $|x|$ -положительно однородная неотрицательная функция.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, z \in P = \{x \in X : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in C\} \quad (2.1)$$

Точка $x_0 \in P$ называется точкой локального минимума f_0 на P , если существует окрестность U точки x_0 такое, что $f_0(x_0) \leq f_0(x)$ при $x \in P \cap U$.

Теорема 2.1. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, $C \subset X$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$.

Доказательство. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $H_C(x_0)$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in H_C(x_0)$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x}) \leq o(|t\bar{x}|)$ при $t \in \mathbb{R}, |t\bar{x}| \leq \delta, i \in I$.

Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i(\bar{x}) + o(t|\bar{x}|)$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0, f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0, j \in J$ при $t \in (0, \lambda_2]$. По условию $\bar{x} \in H_C(x_0)$. Тогда существует $v_0 > 0$ такое, что $x_0 + t\bar{x} \in C$ при $t \in [0, v_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $H_C(x_0)$. По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, $C \subset X$ и $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Доказательство. По теореме 2.1 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$. Из следствия 5.2[3, с.268] следует, что $sH_C(x_0) = T_C(x_0)$. Так как $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции при $i \in I$, то $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Следствие доказано. Аналогично теореме 2.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, C выпуклое множество, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Доказательство. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $S_C(x_0)$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in S_C(x_0)$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x}) \leq o(|t\bar{x}|)$ при $t \in \mathbb{R}, |t\bar{x}| \leq \delta, i \in I$. Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i(\bar{x}) + o(t|\bar{x}|)$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0, f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0, j \in J$ при $t \in (0, \lambda_2]$. Если $\bar{x} \in S_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\bar{x} \in \frac{C - x_0}{\lambda_0}$, т. е. $x_0 + \lambda_0\bar{x} \in C$. По предложению 4.1.2 [4, с.169] $S_C(x_0)$

выпуклое множество. Поэтому $x_0 + t\bar{x} = (1 - \frac{t}{\lambda_0})x_0 + \frac{t}{\lambda_0}(x_0 + \lambda_0\bar{x}) \in C$ при $t \in [0, \lambda_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), то получим проти-воречие. Поэтому система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $S_C(x_0)$. По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in S_C(x_0)$.

Так как $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции при $i \in I$, то $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \text{cl}S_C(x_0) = T_C(x_0)$.

Теорема доказана.

Из следствия 2.1 и теоремы 2.2 получим, что точка нуль минимизирует выпуклую функцию $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \delta_{T_C(x_0)}(x)$ в X . Так как $\partial \delta_{T_C(x_0)}(0) = N_C(x_0)$, то имеем $0 \in \partial(\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \delta_{T_C(x_0)}(x))_{x=0} = \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i(0) + N_C(x_0)$.

Замечание 2.1. Из доказательства следствия 2.1 и теоремы 2.2 имеем, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in I_C(x_0)$ и $x \in S_C(x_0)$ соответственно. Поэтому $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Пусть X и Y - отделимые локально выпуклые пространства, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i \in I = \{0, 1, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор, $C \subset X, \bar{y} \in Y$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, z \in \{x \in X : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \Lambda x + \bar{y} = 0, x \in C\} \quad (2.2)$$

Теорема 2.3. Если X и Y отделимые локально выпуклые пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (2.2), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|, i \in I, \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородные непрерывные функции при $i \in I, f_j(x_0) = 0$ при $j \in J, \Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор, $C \subset X$, то $\max_{i \in I} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$.

Доказательство. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $x \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker} \Lambda$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x}) \leq o(|t\bar{x}|)$ при $t \in \mathbb{R}, |t\bar{x}| \leq \delta, i \in I$. Поэтому имеем, что

$f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i(\bar{x}) + o(t|\bar{x}|)$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$.

Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0$, $j \in J$ при $t \in (0, \lambda_2]$. Поэтому $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0$, $j \in J$, $\Lambda(x_0 + t\bar{x}) + \bar{y} = 0$ при $t \in (0, \lambda_2]$. По условию $\bar{x} \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker}\Lambda$. Тогда существует $\nu_0 > 0$, где $\lambda_2 \geq \nu_0$, такое, что $x_0 + t\bar{x} \in C$ при $t \in [0, \nu_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.2), то получим противоречие, т.е. система $\varphi_0(x) < 0$, $\varphi_1(x) < 0$, ..., $\varphi_m(x) < 0$ не имеет решения на $\gamma_C(x_0) \cap \text{Ker}\Lambda$. Поэтому $\max_{i \in I} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \gamma_C(x_0) \cap \text{Ker}\Lambda$. Теорема доказана.

Теорема 2.4. Если X и Y пространства Фреше, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.2), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулиппшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный оператор, $\text{Im}\Lambda = Y$, $C \subset X$ и $\text{int} H_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, \Lambda x \rangle \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$.

Доказательство. Так как $H_C(x_0) \subset \gamma_C(x_0)$, то из доказательства теоремы 2.3 следует, что система $\varphi_0(x) < 0$, $\varphi_1(x) < 0$, ..., $\varphi_m(x) < 0$, $\Lambda x = 0$ не имеет решения на $x \in H_C(x_0)$. Тогда по теореме 1.1 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, \Lambda x \rangle \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$. Теорема доказана.

Пусть X и Y - счетно-банаховы пространства топологии, которых задаются семейством направленных норм $\{x \rightarrow \|x\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{y \rightarrow \|y\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ соответственно, $\|x\|_k \in \{\|\cdot\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \|y\|_s \in \{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Через X_k обозначим пространство X с нормой $\|x\|_k$, а через Y_s обозначим пространство Y с нормой $\|y\|_s$. Пусть $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $F : X \rightarrow Y$, $C \subset X$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, z \in \{x \in X : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, F(x) = 0, x \in C\}. \quad (2.3)$$

Если x_0 -точка локального минимума в задаче (2.3), то существует X_k такое, что x_0 -является точкой локального минимума в задаче (2.3) относительно X_k . Также считаем, что пространство Y_s такое, что оператор $F : X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$. Положим $|x|_1 = \|x\|_k$, $|y|_2 = \|y\|_s$. Для простоты $\|x\|_k$ обозначим через $\|x\|$, а $\|y\|_s$ через $\|y\|$.

Пусть $I_C(x_0)$ ($T_C(x_0)$) множество всех гиперкасательных (касательных) к множеству C в точке $x_0 \in C$ относительно X_k и $N_C(x_0) = T_C^-(x_0)$ в X_k .

Теорема 2.5. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.3) относительно X_k , в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулиппшицеву условию в точке x_0 , где $i \in I$, $\varphi_i : X_k \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, оператор $F : X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y$, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$ относительно X_k , то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Доказательство. Обозначим $\Lambda = F'(x_0)$. Покажем, что система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0, \Lambda x = 0$ не имеет решения на $I_C(x_0)$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in I_C(x_0)$ такая, что $\varphi_i(\bar{x}) < 0$ при $i \in I$ и $\Lambda \bar{x} = 0$. Так как $\Lambda \bar{x} = F'(x_0)\bar{x} = 0$ и $F'(x_0)X = Y$, то по теореме Люстерника [9, с.33] существует $\varepsilon > 0$ и отображение $r: [0, \varepsilon] \rightarrow X$ такие, что $\frac{r(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$ и $F(x_0 + t\bar{x} + r(t)) = 0$ при $t \in [0, \varepsilon]$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулип-шицеву условию в точке x_0 , где $i \in I$. Тогда имеем $f_i(x_0 + t\bar{x} + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\bar{x} + r(t)) \leq o(\|t\bar{x} + r(t)\|)$ при $t \in [0, \varepsilon], \|t\bar{x} + r(t)\| \leq \delta, i \in I$. Так как φ_i непрерывная функция, то существует $0 < \delta_0 \leq \frac{1}{2}\delta$ такое, что $\left| \varphi_i\left(\bar{x} + \frac{r(t)}{t}\right) - \varphi_i(\bar{x}) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \varphi_i(\bar{x}) \right|$ при $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\| \leq \delta_0$ и $i \in I$. Тогда получим, что $\varphi_i\left(\bar{x} + \frac{r(t)}{t}\right) \leq \frac{1}{2} \varphi_i(\bar{x})$ при $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\| \leq \delta_0$ и $i \in I$. Так как $\frac{r(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$, то существует λ , где $0 < \lambda < 1$, такое, что $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\| \leq \delta_0$ при $t \in (0, \lambda]$. Тогда $\|t\bar{x} + r(t)\| \leq \delta$ при $t \in [0, \lambda_1]$, где $\lambda_1 = \min\left\{\lambda, \frac{1}{2\|\bar{x}\|}\delta, \varepsilon\right\}$. Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x} + r(t)) - f_i(x_0) \leq 0,5 t\varphi_i(\bar{x}) + o(t\|\bar{x} + \frac{1}{t}r(t)\|) \leq 0,5 t\varphi_i(\bar{x}) + o(t(\|\bar{x}\| + \delta_0))$ при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x} + r(t)) - f_0(x_0) < 0, f_j(x_0 + t\bar{x} + r(t)) < 0, j \in J, F(x_0 + t\bar{x} + r(t)) = 0$ при $t \in (0, \lambda_2]$. Если $\bar{x} \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + t\bar{x} + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.3), то получим проти-воречие. Поэтому система $\varphi_0(x) < 0, \varphi_1(x) < 0, \dots, \varphi_m(x) < 0, \Lambda x = 0$ не имеет решения на $I_C(x_0)$. По теореме 1.1 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in I_C(x_0)$. Так как $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции при $i \in I$ и $\Lambda = F'(x_0)$ линейный непрерывный оператор, то по теореме 2.4.8 [5, с.59] имеем, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in \text{cl} I_C(x_0) = T_C(x_0)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.2. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.3) относительно X_k , в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулип-шицеву условию в точке x_0 , где $i \in I, \varphi_i: X_k \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I, f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, оператор $F: X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y, C$ выпуклое множество, $\text{int} C \neq \emptyset$ относительно X_k , то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Справедливость следствия 2.2 следует из теоремы 2.5. Из теоремы 2.5 и следствия 2.2 имеем, что точка нуль минимизирует выпуклую функцию $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x)$ в X . Поэтому получим

$$0 \in \partial\left(\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x)\right)_{x=0} = \sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{\partial} \varphi_i(0) + F'(x_0)^* y^* + N_C(x_0).$$

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.5 имеем, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in I_C(x_0) \cap \text{Ker } F'(x_0)$. Поэтому если $\text{int } T_C(x_0) \cap \text{Ker } F'(x_0) \neq \emptyset$, то отсюда следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker } F'(x_0)$.

3. Необходимое условие второго порядка

Пусть X отделимое локально выпуклое пространство, $C \subset X$, $x_0 \in C$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad x \in C \quad (3.1)$$

где $f_j: X \rightarrow \mathbf{R}$, $j \in I = \{0,1,\dots,m\}$, $C \subset X$. Положим

$H = \{x \in X: \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0,1,\dots,m, x \in I_C(x_0)\}$, $g_a(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0)}(x)$, где

$a = (a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$.

Теорема 3.1. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I = \{0,1,\dots,m\}$, функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхнему полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, $\varphi_i^1: X \rightarrow \mathbf{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2: X \rightarrow \mathbf{R}$ положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1,2,1, \delta, o(2))$ (или $(1, \mu, 1, \delta)$, где $\mu > 1$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$ при $i \in I$, $\partial g_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in \mathbf{R}^{m+1}$, $C \subset X$ и $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0) \right\} \geq 0 \text{ при } h \in H \cup \{0\}.$$

Доказательство. Пусть $t \geq 0$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2: X \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет $(1,2,1, \delta, o(2))$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$, то

$$|\varphi_i^2(t_1 x_1 + t_2 x_2) - \varphi_i^2(t_1 x_1)| \leq K t_2 |x_2| (t_2 |x_2| + t_1 |x_1|) + o(t_2^2 |x_1|^2)$$

при $x_1, x_2 \in X$, $t_1 |x_1| \leq \delta$, $t_2 |x_2| \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq K t^2 |x|^2$ при $t|x| \leq \delta$, $i \in I$. По условию получим, что $f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2 |x|^2) \leq t \varphi_i^1(x) + K t^2 |x|^2 + o(t^2 |x|^2)$

при $x \in X$, $t|x| \leq \delta$ и $i \in I$. По следствию 5.2[3, с.268] имеем, что $\text{cl } I_C(x_0) = T_C(x_0)$. Тогда из замечания 2.1 следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$. Пусть $h \in H$.

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0).$$

Положим $a_i = \varphi_i^2(h)$, $g(a) = \inf_{x \in T_C(x_0)} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$. Из леммы 1.1 следует, что $b \in \partial g(0)$ в том

и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что

$$0 \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i^1(0) + N_C(x_0), \quad b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad \text{Поэтому}$$

$$\partial g(0) = \{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0\}.$$

По теореме Хермандера (см.[10]) имеем, что $g(a) = \sup_{\lambda \in \partial g(0)} (\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i)$. Так как $\partial g_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in \mathbf{R}^{m+1}$, то существует точка $x = \xi(h)$, где $x \in T_C(x_0)$ такая, что

$$g(a) = \inf_{x \in T_C(x_0)} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup_{\lambda \in \partial g(0)} (\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) =$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0 \right\}.$$

Поэтому
$$E(h) = g(\varphi^2(h)) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* = 0 \right\}$$
, где $\varphi^2(h) = (\varphi_0^2(h), \varphi_1^2(h), \dots, \varphi_m^2(h))$.

По условию имеем, что $f_i(x_0 + th + t^2\xi) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(th + t^2\xi) - \varphi_i^2(th + t^2\xi) \leq o(t^2|h + t\xi|^2)$

при $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = \min\{1, \frac{\delta}{|h|+|\xi|+1}\}$. Так как функции $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют

(1,2,1, $\delta, o(2)$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$ при $i \in I$, то

$$f_i(x_0 + th + t^2\xi) - f_i(x_0) \leq \varphi_i^1(th + t^2\xi) + \varphi_i^2(th + t^2\xi) - \varphi_i^2(th) + \varphi_i^2(th) + o(t^2|h + t\xi|^2) \leq$$

$$\leq \varphi_i^1(th) + \varphi_i^1(t^2\xi) + o(t^2|h + t\xi|^2) + Kt^2|\xi|(t|h| + t^2|\xi|) + o(t^2|h|^2) + \varphi_i^2(th) \leq t^2\varphi_i^1(\xi) + t^2\varphi_i^2(h) + o_1(t^2)$$

при $t \in [0, t_0]$, где $\frac{o_1(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Положив $f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ имеем, что

$$f(x_0 + th + t^2\xi) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + th + t^2\xi) \leq t^2 \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi) + \varphi_i^2(h)) + o_1(t^2) \text{ при } t \in [0, t_0].$$

Так как $h \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + th + t^2\xi \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Если допустить, что $E(h) < 0$, то имеем $f(x_0 + th + t^2\xi) < 0$ при малых $t > 0$. Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), то получим противоречие.

Теорема доказана. Положим $\tilde{H} = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, x \in H_C(x_0)\}$.

Теорема 3.2. Если X отделимое локально выпуклое пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхнему полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклые положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют (1,2,1, $\delta, o(2)$) (или (1, $\mu, 1, \delta$), где $\mu > 1$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$ при $i \in I$, $C \subset X$, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$ и существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^1(x) \geq 0$ и $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^2(x) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$.

Доказательство. Пусть $t \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет (1,2,1, $\delta, o(2)$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $|x|$, то
$$|\varphi_i^2(t_1x_1 + t_2x_2) - \varphi_i^2(t_1x_1)| \leq Kt_2|x_2|(t_2|x_2| + t_1|x_1|) + o(t_1^2|x_1|^2) \text{ при } x_1, x_2 \in X, t_1|x_1| \leq \delta, t_2|x_2| \leq \delta.$$
 Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq Kt^2|x|^2$ при $t|x| \leq \delta, i \in I$. По условию имеем, что
$$f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2|x|^2) \leq t\varphi_i^1(x) + Kt^2|x|^2 + o(t^2|x|^2)$$

при $x \in X, t|x| \leq \delta$ и $i \in I$. Тогда из доказательства теоремы 2.1 следует, что система $\varphi_0^1(x) < 0, \varphi_1^1(x) < 0, \dots, \varphi_m^1(x) < 0$ не имеет решения на $H_C(x_0)$. Поэтому $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in H_C(x_0)$

Покажем, что система $\varphi_0^1(x) + \varphi_0^2(x) < 0, \varphi_1^1(x) + \varphi_1^2(x) < 0, \dots, \varphi_m^1(x) + \varphi_m^2(x) < 0$ не имеет решения на \tilde{H} . Предположим противное. Пусть существует $\bar{x} \in \tilde{H}$ такая, что $\varphi_0^1(\bar{x}) + \varphi_0^2(\bar{x}) < 0, \varphi_1^1(\bar{x}) + \varphi_1^2(\bar{x}) < 0, \dots, \varphi_m^1(\bar{x}) + \varphi_m^2(\bar{x}) < 0$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$

локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $|x|$, где $i \in I$. Тогда имеем, что

$$f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(t\bar{x}) - \varphi_i^2(t\bar{x}) \leq o(t^2|\bar{x}|^2)$$

при $t \in \mathbb{R}$, $|t\bar{x}| \leq \delta$, $i \in I$. Поэтому имеем, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i^1(\bar{x}) + t^2\varphi_i^2(\bar{x}) + o(t^2|\bar{x}|^2)$

при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$, где $\lambda_1 = \frac{\delta}{|\bar{x}|}$ при $|\bar{x}| \neq 0$, λ_1 положительное число при $|\bar{x}| = 0$.

Так как $\bar{x} \in \tilde{H}$, то $\bar{x} \in H_C(x_0)$ и существуют $I_0 \subset I$ и $I_1 \subset I$, где $I_0 \cup I_1 = I$, такие, что $\varphi_i^1(\bar{x}) = 0$ при $i \in I_0$ и $\varphi_i^1(\bar{x}) < 0$ при $i \in I_1$. Поэтому $\varphi_i^2(\bar{x}) < 0$ при $i \in I_0$. По условию получим, что $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t\varphi_i^1(\bar{x}) + t^2\varphi_i^2(\bar{x}) + o(t^2|\bar{x}|^2)$ при $t \in [0, \lambda_1]$, $i \in I_1$ и $f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0) \leq t^2\varphi_i^2(\bar{x}) + o(t^2|\bar{x}|^2)$ при $t \in [0, \lambda_1]$, $i \in I_0$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что $f_0(x_0 + t\bar{x}) - f_0(x_0) < 0$, $f_j(x_0 + t\bar{x}) < 0$, $j \in J$

при $t \in (0, \lambda_2]$. Так как $\bar{x} \in H_C(x_0)$, то существует $v_0 > 0$, где $v_0 \leq \lambda_2$, такое, что $x_0 + t\bar{x} \in C$ при $t \in [0, v_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (3.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0^1(x) + \varphi_0^2(x) < 0$, $\varphi_1^1(x) + \varphi_1^2(x) < 0$, ..., $\varphi_m^1(x) + \varphi_m^2(x) < 0$ не имеет решения на \tilde{H} . По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(x)) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$. Так как \tilde{H} конус, то имеем, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^1(x) \geq 0$ и $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^2(x) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$.

Теорема доказана.

Если существует точка $\bar{x} \in \tilde{H}$ такая, что $\varphi_1^1(\bar{x}) < 0$, ..., $\varphi_m^1(\bar{x}) < 0$ и $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in \tilde{H}$ и выполняются условия теоремы 3.2, то $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

Пусть X и Y -счетно-банаховы пространства, топологии которых задаются семейством направленных норм $\{x \rightarrow \|x\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{y \rightarrow \|y\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ соответственно, $F: X \rightarrow Y$ отображение, $\|\cdot\|_k \in \{\|\cdot\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\|\cdot\|_s \in \{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Через X_k обозначим пространство X с нормой $\|x\|_k$, а через Y_s обозначим пространство Y с нормой $\|y\|_s$.

Пусть $B_k(0, \delta) = \{x \in X: \|x\|_k \leq \delta\}$, $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $o(0) = 0$ и $\tilde{o}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{\tilde{o}(t)}{t} = 0$, $\tilde{o}(0) = 0$. Отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, v, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$ с постоянной K в точке $\bar{x} \in X$, если F удовлетворяет условию $\|F(\bar{x} + x + z) - F(\bar{x} + x) - S(x + z) + S(x)\|_s \leq K \|z\|_k^v (\|x\|_k^{\beta - \alpha v} + \|z\|_k^{\frac{\beta - \alpha v}{\alpha}}) + o(\|x\|_k^\beta)$ при $x, z \in B_k(0, \delta)$ (см.[2]). Если $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, v, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$. Если $o(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, v, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$.

Если существует функция $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $o(0) = 0$ такая, что $\|F(\bar{x} + x) - F(\bar{x}) - S(x)\|_s \leq o(\|x\|_k^\beta)$ при $x \in B_k(0, \delta)$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S - (o(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке \bar{x} относительно пары $(\|x\|_k, \|y\|_s)$.

Если существует функция $o: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $o(0) = 0$ такая, что $f(\bar{x} + x) - f(\bar{x}) - \varphi(x) \leq o(\|x\|_k^\beta)$ при $x \in B_k(0, \delta)$, то функцию f назовем $\varphi - (o(\beta), \delta)$ локально верхней полулипшицевой в точке \bar{x} относительно $\|x\|_k$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, F(x) = 0, x \in C \quad (3.2)$$

где $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}, j \in I = \{0, 1, \dots, m\}, F: X \rightarrow Y$ оператор, $C \subset X$.

Пусть $I_C(x_0)$ ($T_C(x_0)$) множество всех гиперкасательных (касательных) к множеству C в точке $x_0 \in C$ относительно X_k и пусть $N_C(x_0) = T_C^-(x_0)$ в X_k .

Положим $\Lambda x = F'(x_0)x, H = \{x \in X: \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, \Lambda x = 0, x \in I_C(x_0)\}, g_{(a,y)}(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y)}(x)$, где $(a, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y, a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Теорема 3.3. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (3.2) в $X_k, f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхнему полулипшицеву условию в точке x_0 относительно нормы $\|\cdot\|_k, \varphi_i^1: X_k \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I, \varphi_i^2: X_k \rightarrow \mathbb{R}$ положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1, \mu, 1, \delta)$, где $\mu > 1$, (или $(1, 2, 1, \delta, o(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль при $i \in I$ относительно нормы $\|\cdot\|_k$, отображение $F: X_k \rightarrow Y_s$ строго дифференцируемо в точке $x_0, F'(x_0)(X) = Y$ и F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - (o(2), \delta)$ локально липшицеву условию в точке x_0 относительно пары $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s), S: X_k \rightarrow Y_s$ положительный однородный степени 2 оператор и удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ (или $(1, 2, 1, \delta, \tilde{o}(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно пары $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s), \partial g_{(a,y)}^*(0) \neq \emptyset$ в X_k при $(a, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y, C \subset X$ и $I_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$, где $\Lambda x = F'(x_0)x$, то

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) + \langle y^*, S(h) \rangle : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \right.$$

$$\left. x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq 0 \text{ при } h \in H \cup \{0\}.$$

Доказательство. Пусть $t \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2: X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно $\|\cdot\|_k$, то $|\varphi_i^2(t_1 x_1 + t_2 x_2) - \varphi_i^2(t_1 x_1)| \leq K t_2 \|x_2\|_k (t_2^{\mu-1} \|x_2\|_k^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|_k^{\mu-1})$ при $x_1, x_2 \in X, t_1 \|x_1\|_k \leq \delta, t_2 \|x_2\|_k \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq K t^\mu \|x\|_k^\mu$ при $t \|x\|_k \leq \delta, i \in I$, где $\mu > 1$. По условию функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально полулипшицеву условию в точке x_0 относительно $\|\cdot\|_k$. Поэтому $f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2 \|x\|_k^2) \leq \varphi_i^1(tx) + K t^\mu \|x\|_k^\mu + o(t^2 \|x\|_k^2)$ при $x \in X, t \|x\|_k \leq \delta$ и $i \in I$. Так как $S: X \rightarrow Y$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль относительно пары $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s)$, где $\mu > 1$, то $\|S(t_1 x_1 + t_2 x_2) - S(t_1 x_1)\|_s \leq K t_2 \|x_2\|_k (t_2^{\mu-1} \|x_2\|_k^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|_k^{\mu-1})$ при $x_1, x_2 \in X, t_1 \|x_1\|_k \leq \delta, t_2 \|x_2\|_k \leq \delta$. Поэтому $\|S(tx)\|_s \leq K t^\mu \|x\|_k^\mu$ при $x \in X, t \|x\|_k \leq \delta$.

Из неравенства $\|F(x_0 + tx) - F(x_0) - F'(x_0)tx - S(tx)\|_s \leq o(t^2 \|x\|_k^2)$ при $x \in X, t \|x\|_k \leq \delta$ имеем, что $\|F(x_0 + tx) - F'(x_0)tx - F(x_0)\|_s \leq K t^\mu \|x\|_k^\mu + o(t^2 \|x\|_k^2)$ при $x \in X, t \|x\|_k \leq \delta$. Тогда из замечания 2.2 следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda$. Пусть $h \in H$.

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0), \quad \Lambda x + S(h) = 0.$$

Положим $a_i = \varphi_i^2(h)$, $y = S(h)$ и $g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$. Из леммы 1.1 следует,

что $(y^*, b) \in \partial g(0, 0)$ в том и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что

$$-\Lambda^* y^* \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i^1(0) + N_C(x_0) \quad \text{и} \quad b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad \text{Поэтому}$$

$$\partial g(0, 0) = \{(y^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0),$$

$$y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

По теореме Хермандера (см.[10]) имеем, что $g(y, a) = \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i)$.

Так как $\partial g_{(a, y)}^*(0) \neq \emptyset$ при $(a, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y$, то существует точка $x = \xi(h)$, где $x \in T_C(x_0)$, $\Lambda x + S(h) = 0$ такая, что $g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) =$

$$= \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) = \sup \{ \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1,$$

$$p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}.$$

Поэтому

$$E(h) = g(S(h), \varphi^2(h)) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup \{ \langle y^*, S(h) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0,$$

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \},$$

где $\varphi^2(h) = (\varphi_0^2(h), \varphi_1^2(h), \dots, \varphi_m^2(h))$, $\Lambda \xi(h) + S(h) = 0$. Так как F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - (o(2), \delta)$ локально липшицеву условию в точке x_0 относительно пары нормы $(\|\cdot\|_k, \|\cdot\|_s)$, то $\|F(x_0 + th + t^2\xi) - F(x_0) - \Lambda(th + t^2\xi) - S(th + t^2\xi)\|_s \leq o(\|th + t^2\xi\|_k^2)$

при $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = \min\{1, \frac{\delta}{\|h\|_k + \|\xi\|_k + 1}\}$. Поэтому из соотношения $\Lambda h = 0$ и $\Lambda \xi + S(h) = 0$ имеем, что $\|F(x_0 + th + t^2\xi) - F(x_0) + S(th) - S(th + t^2\xi)\|_s \leq o(\|th + t^2\xi\|_k^2)$

при $t \in [0, t_0]$. Отсюда имеем, что $\|F(x_0 + th + t^2\xi)\|_s \leq \|S(th + t^2\xi) - S(th)\|_s + o(\|th + t^2\xi\|_k^2) \leq$

$$\leq Kt^2 \|\xi\|_k (\|th\|_k^{\mu-1} + \|t^2\xi\|_k^{\mu-1}) + o(\|th + t^2\xi\|_k^2) = o_1(t^2)$$

при $t \in [0, t_0]$, где $\frac{o_1(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. По теореме Люстерника [9, с.33] существуют $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$

и число $m > 0$ такие, что $F(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) = 0$ и $\|r(t)\|_k \leq m \|F(x_0 + th + t^2\xi)\|_s = o_2(t^2)$ при $t \in [0, t_0]$, где $r(t) = x(x_0 + th + t^2\xi)$, $o_2(t) = m o_1(t)$, $\frac{o_2(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Также имеем, что существует число $t_1 > 0$, где $t_1 \leq t_0$, такое, что $f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(th + t^2\xi + r(t)) - \varphi_i^2(th + t^2\xi + r(t)) \leq o(\|th + t^2\xi + r(t)\|_k^2)$

при $t \in [0, t_1]$. По условию $\varphi_i^1(x)$ сублинейная непрерывная функция в X_k . Тогда существует число $c > 0$ такое, что $|\varphi_i^1(x)| \leq c \|x\|_k$ при $x \in X$ и $i \in I$. Поэтому $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \varphi_i^1(r(t)) = \lim_{t \downarrow 0} \varphi_i^1\left(\frac{1}{t^2} r(t)\right) = 0$, т.е. $\varphi_i^1(r(t)) = o_3(t^2)$, где $\frac{o_3(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) - f_i(x_0) &\leq \varphi_i^1(th + t^2\xi + r(t)) + \varphi_i^2(th + t^2\xi + r(t)) - \varphi_i^2(th) + \\ &+ \varphi_i^2(th) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|_k^2) \leq \varphi_i^1(th) + \varphi_i^1(t^2\xi) + \varphi_i^1(r(t)) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|_k^2) + \\ &+ K\|t^2\xi + r(t)\|_k (\|th\|_k^{\mu-1} + \|t^2\xi + r(t)\|_k^{\mu-1}) + \varphi_i^2(th) \leq t^2\varphi_i^1(\xi) + t^2\varphi_i^2(h) + o_4(t^2) \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_1]$, где $\frac{o_4(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Положив $f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ имеем, что

$$f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) \leq t^2 \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi) + \varphi_i^2(h)) + o_4(t^2)$$

при $t \in [0, t_1]$. Так как $h \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + th + t^2\xi + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Если допустить, что $E(h) < 0$, то имеем $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) < 0$ при малых $t > 0$. Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (3.2), то получим противоречие.

Теорема доказана.

Замыкание множества H в X_k обозначим через clH . Если $H \neq \emptyset$, то при условии теоремы 3.3 имеем, что $clH = \{x \in X: \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, F'(x_0)x = 0, x \in T_C(x_0)\}$.

Поэтому если $H \neq \emptyset$, $h \rightarrow E(h)$ непрерывная функция в clH и выполняются условия теоремы 3.3, то $E(h) \geq 0$ при $h \in clH$.

Список литературы:

1. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку.: Элм, 1996.- 148 с.
2. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing. 2014.-359 p.
3. Rockafellar R.T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions.// Canad.J. Math.-1980. №2(32).-P.257-280.
4. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. -М.: Мир, 1988.- 510 с.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. -М.: Наука, 1988.-280 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория.-М.: Наука, 1962.-895 p.
7. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14).-С.44-55.
8. Sadygov M.A. Nondifferentiable optimization.// Scitechnology scientific journal.- 2018.-№ 9. - P.31-42.
9. Алексеев В.М., Галаев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. -М.: Наука, 1984.-288 с.
10. Лоран Р.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. -М.: Мир, 1975.- 496 с.

Холмуродов Абдулхамид Эркинович

доктор физико-математических наук

заведующий кафедрой прикладной математики

Каршинский Государственный Университет

Дильмурад Насрутдин

кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Каршинский Государственный Университет

Мамасолиев Бахтиёр Жирамирзаевич

старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений

Национальный Университет Узбекистана

О ЯДРЕ ОСНОВНЫХ ГРУПП ЛИ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Kholmurodov A. E.

doctor of physical and mathematical sciences

Head of the Department of Applied Mathematics

Karshi State University

Dilmuradov N.

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor

associate professor of the chair of mathematical analysis and differential equations

Karshi State University

Mamasoliev B. Zh.

senior lecturer at the chair of differential equations

National University of Uzbekistan

ON THE CORE OF THE BASIC GROUPS OF A ONE-DIMENSIONAL EQUATION SYSTEM OF TWO-SPEED HYDRODYNAMICS WITH ONE PRESSURE

Аннотация: Найдено ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений двухскоростных сред с одним давлением с использованием методов теории групп и алгебр Ли. Они основаны на изучении инвариантности дифференциальных уравнений относительно одного из параметров групп Ли точечных преобразований и систематически унифицирует и расширяет хорошо известные специальные методы для построения явных решений для дифференциальных уравнений, особенно для нелинейных уравнений с частными производными.

В данной работе на основе метода группового анализа найдено ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению.

Summary: The core of the basic Lie groups of transformations of a one-dimensional system of equations of two-speed one-pressure media using the methods of the theory of groups and Lie algebras is found. They are based on the study of the invariance of differential equations with respect to one of the parameters of the Lie groups of point transformations and systematically unifies and extends well-known special methods for constructing explicit solutions for differential equations, especially for nonlinear partial differential equations.

In this paper, based on the group analysis method, the core of the main Lie groups of transformations of a one-dimensional system of equations of two-velocity hydrodynamics with pressure equilibrium phases is found.

Ключевые слова: двухскоростная гидродинамика, инварианты дифференциальных операторов, инвариантные группы, инварианты алгебры Ли, инвариантные решения, частично инвариантные решения.

Key words: two-speed hydrodynamics, invariants of differential operators, invariant groups, Lie algebra invariants, invariant solutions, partially invariant solutions.

Введение

Нелинейными уравнениями описываются различные эволюционные явления в различных областях науки и техники. В исследовании этих явлений имеет первостепенное значение построение точных решений. Отыскание таких решений представляет собой весьма трудноразрешимую задачу. При этом построены точные решения только для особых случаев. Тем не менее, в последние годы были предложены различные способы решения этих типов не-

линейных эволюционных уравнений, включая биллинейный метод Хироты [1], метод обратной задачи рассеяния [2], использование преобразования Бэклунда [3] или преобразования Дарбу [4], усеченное разложение Пенлеве [5], метод группового анализа [6-12], метод баланса [13], вариационный метод итераций [14], и полуобратный метод [15].

Метод группового анализа играет важную роль в поиске решений для нелинейных дифференциальных уравнений. Он основан на изучении ин-

вариантности дифференциальных уравнений относительно одного из параметров групп Ли точечных преобразований [6-12], и систематически унифицирует и расширяет хорошо известные специальные методы для построения явных решений для дифференциальных уравнений, особенно для нелинейных уравнений с частными производными. В [16] исследована на основе метода группового анализа нелинейная система уравнений в частных производных,

описывающая гидродинамику двухфазной среды без учёта температурных эффектов и с учетом диссипации энергии, обусловленной силой вязкого трения между фазами.

В данной работе найдено ядро основных групп Ли одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

Уравнения одномерной двухскоростной гидродинамики с одним давлением

Уравнения одномерного движения двухфазной жидкости без учета вязкости и трения в отсутствии массовых сил в изотермическом случае имеет вид [17,18]

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l v)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\rho_l}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x} (u-v)^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho_s}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x} (u-v)^2 \quad (4)$$

где u и v – векторы скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ_s и ρ_l , $\rho = \rho_s + \rho_l$ – общая плотность двухскоростного континуума, а P – общее давление. Система (1) – (4) замыкается уравнением состояния:

$$P = P(\rho) \quad (5)$$

Ядро основных алгебр системы

Для удобства введем обозначения $\bar{\rho} = \rho = \rho_s + \rho_l$, $\rho = \rho_s$, $\sigma = \rho_l$, $\bar{w} = w^2$, $w = (u - v)$. Выразим производную функции P по x через функции ее аргументов:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{d\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = P_{\bar{\rho}} (\rho_x + \sigma_x).$$

Тогда система (1) – (5) примет вид

$$\rho_t + \rho_x u + u_x \rho = 0 \quad (6)$$

$$\sigma_t + \sigma_x v + v_x \sigma = 0 \quad (7)$$

$$u_t + u u_x + \bar{\rho}^{-1} (P_{\bar{\rho}} (\rho_x + \sigma_x) + w(u_x - v_x) \sigma) = 0 \quad (8)$$

$$v_t + v v_x + \bar{\rho}^{-1} (P_{\bar{\rho}} (\rho_x + \sigma_x) - w(u_x - v_x) \rho) = 0 \quad (9)$$

Зададим вид допускаемого системой (6) – (9) инфинитезимального оператора [6]

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} + \beta \frac{\partial}{\partial \sigma} + \delta \frac{\partial}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial v},$$

где функции $\tau, \xi, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ зависят от переменных t, x, ρ, σ, u, v . Построим первое продолжение оператора X

$$X^1 = X + \varphi^t \frac{\partial}{\partial \rho_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \psi^t \frac{\partial}{\partial \sigma_t} + \psi^x \frac{\partial}{\partial \sigma_x} + U^t \frac{\partial}{\partial u_t} + U^x \frac{\partial}{\partial u_x} + V^t \frac{\partial}{\partial v_t} + V^x \frac{\partial}{\partial v_x},$$

где коэффициенты $\varphi^t, \varphi^x, \psi^t, \psi^x, U^t, U^x, V^t, V^x$ зависят от $t, x, \rho, \sigma, u, v, \rho_t, \rho_x, \sigma_t, \sigma_x, u_t, u_x, v_t, v_x$. Данные коэффициенты вычисляются по формулам продолжения [10] следующим образом

$$\varphi^t = \alpha_t + \rho_t \alpha_\rho + \sigma_t \alpha_\sigma + u_t \alpha_u + v_t \alpha_v - \rho_t (\tau_t - \rho_t \tau_\rho - \sigma_t \tau_\sigma - u_t \tau_u - v_t \tau_v) - \rho_x (\xi_t - \rho_t \xi_\rho - \sigma_t \xi_\sigma - u_t \xi_u - v_t \xi_v),$$

$$\varphi^x = \alpha_x + \rho_x \alpha_\rho + \sigma_x \alpha_\sigma + u_x \alpha_u + v_x \alpha_v - \rho_t (\tau_x - \rho_x \tau_\rho - \sigma_x \tau_\sigma - u_x \tau_u - v_x \tau_v) - \rho_x (\xi_x - \rho_x \xi_\rho - \sigma_x \xi_\sigma - u_x \xi_u - v_x \xi_v),$$

$$U^t = \delta_t + \rho_t \delta_\rho + \sigma_t \delta_\sigma + u_t \delta_u + v_t \delta_v - u_t (\tau_t - \rho_t \tau_\rho - \sigma_t \tau_\sigma - u_t \tau_u - v_t \tau_v) - u_x (\xi_t - \rho_t \xi_\rho - \sigma_t \xi_\sigma - u_x \xi_u - v_x \xi_v),$$

$$U^x = \delta_x + \rho_x \delta_\rho + \sigma_x \delta_\sigma + u_x \delta_u + v_x \delta_v - u_t (\tau_x - \rho_x \tau_\rho - \sigma_x \tau_\sigma - u_x \tau_u - v_x \tau_v) - u_x (\xi_x - \rho_x \xi_\rho - \sigma_x \xi_\sigma - u_x \xi_u - v_x \xi_v),$$

$$\psi^t = \beta_t + \rho_t \beta_\rho + \sigma_t \beta_\sigma + u_t \beta_u + v_t \beta_v - \sigma_t (\tau_t - \rho_t \tau_\rho - \sigma_t \tau_\sigma - u_t \tau_u - v_t \tau_v) - \sigma_x (\xi_t - \rho_t \xi_\rho - \sigma_t \xi_\sigma - u_t \xi_u - v_t \xi_v),$$

$$\psi^x = \beta_x + \rho_x \beta_\rho + \sigma_x \beta_\sigma + u_x \beta_u + v_x \beta_v - \sigma_t (\tau_x - \rho_x \tau_\rho - \sigma_x \tau_\sigma - u_x \tau_u - v_x \tau_v) - \sigma_x (\xi_x - \rho_x \xi_\rho - \sigma_x \xi_\sigma - u_x \xi_u - v_x \xi_v),$$

$$V^t = \gamma_t + \rho_t \gamma_\rho + \sigma_t \gamma_\sigma + u_t \gamma_u + v_t \gamma_v - v_t (\tau_t - \rho_t \tau_\rho - \sigma_t \tau_\sigma - u_t \tau_u - v_t \tau_v) - v_x (\xi_t - \rho_t \xi_\rho - \sigma_t \xi_\sigma - u_t \xi_u - v_t \xi_v),$$

$$V^x = \gamma_x + \rho_x \gamma_\rho + \sigma_x \gamma_\sigma + u_x \gamma_u + v_x \gamma_v - v_t (\tau_x - \rho_x \tau_\rho - \sigma_x \tau_\sigma - u_x \tau_u - v_x \tau_v) - v_x (\xi_x - \rho_x \xi_\rho - \sigma_x \xi_\sigma - u_x \xi_u - v_x \xi_v).$$

Поддействуем оператором X^1 на каждое уравнение системы (6) – (9), что приведет к уравнениям

$$\varphi^t + \delta \rho_x + \varphi^x u + \alpha u_x + U^x \rho = 0 \tag{10}$$

$$\psi^t + \gamma \sigma_x + \psi^x v + \beta v_x + V^x \sigma = 0 \tag{11}$$

$$U^t + \delta u_x + U^x u - \bar{\rho}^{-2} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\varphi^x + \psi^x) - \bar{\rho}^{-2} \sigma w(u_x - v_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)\beta + \bar{\rho}^{-1} \sigma(u_x - v_x)(\delta - \gamma) + \bar{\rho}^{-1} \sigma w(U^x - V^x) = 0 \tag{12}$$

$$V^t + \gamma v_x + V^x v - \bar{\rho}^{-2} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\varphi^x + \psi^x) + \bar{\rho}^{-2} \rho w(u_x - v_x)(\alpha + \beta) - \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)\alpha - \bar{\rho}^{-1} \rho(u_x - v_x)(\delta - \gamma) - \bar{\rho}^{-1} \rho w(U^x - V^x) = 0 \tag{13}$$

Подставив формулы продолжения в уравнения (10), (11), перейдем на многообразии (6) – (9), заменой производных по t через производные по пространству

$$\begin{aligned} \rho_t &= -\rho_x u - u_x \rho, \\ \sigma_t &= -\sigma_x v - v_x \sigma, \\ u_t &= -u u_x - \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x), \\ v_t &= -v v_x - \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x). \end{aligned}$$

В итоге получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \alpha_t - (\rho_x u + u_x \rho) \alpha_\rho - (\sigma_x v + v_x \sigma) \alpha_\sigma - (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \alpha_u - \\ - (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \alpha_v + (\rho_x u + u_x \rho) [\tau_t - (\rho_x u + u_x \rho) \tau_\rho - (\sigma_x v + v_x \sigma) \tau_\sigma - \\ - (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \tau_u - (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \tau_v] - \\ - \rho_x \xi_t + (\rho_x u + u_x \rho) \rho_x \xi_\rho + \rho_x (\sigma_x v + v_x \sigma) \xi_\sigma + \rho_x (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \xi_u + \\ + \rho_x (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \xi_v + \delta \rho_x + \{\alpha_x + \rho_x \alpha_\rho + \sigma_x \alpha_\sigma + u_x \alpha_u + v_x \alpha_v + \\ + (\rho_x u + u_x \rho) [\tau_x + \rho_x \tau_\rho + \sigma_x \tau_\sigma + u_x \tau_u + v_x \tau_v] - \rho_x \xi_x - \rho_x^2 \xi_\rho - \rho_x \sigma_x \xi_\sigma - \rho_x u_x \xi_u - \rho_x v_x \xi_v\} u + \alpha u_x + \\ + \{\delta_x + \rho_x \delta_\rho + \sigma_x \delta_\sigma + u_x \delta_u + v_x \delta_v + (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) [\tau_x + \\ + \rho_x \tau_\rho + \sigma_x \tau_\sigma + u_x \tau_u + v_x \tau_v] - u_x \xi_x - u_x \rho_x \xi_\rho - u_x \sigma_x \xi_\sigma - u_x^2 \xi_u - u_x v_x \xi_v\} \rho = 0 \tag{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_t - (\rho_x u + u_x \rho) \beta_\rho - (\sigma_x v + v_x \sigma) \beta_\sigma - (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \beta_u - \\ - (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \beta_v + (\sigma_x v + v_x \sigma) [\tau_t - (\rho_x u + u_x \rho) \tau_\rho - (\sigma_x v + v_x \sigma) \tau_\sigma - \\ - (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \tau_u - (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \tau_v] - \\ - \sigma_x \xi_t + (\rho_x u + u_x \rho) \sigma_x \xi_\rho + \sigma_x (\sigma_x v + v_x \sigma) \xi_\sigma + \sigma_x (u u_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \xi_u + \\ + \sigma_x (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) \xi_v + \gamma \sigma_x + \{\beta_x + \rho_x \beta_\rho + \sigma_x \beta_\sigma + u_x \beta_u + v_x \beta_v + \\ + (\sigma_x v + v_x \sigma) [\tau_x + \rho_x \tau_\rho + \sigma_x \tau_\sigma + u_x \tau_u + v_x \tau_v] - \sigma_x \xi_x - \rho_x \sigma_x \xi_\rho - \sigma_x^2 \xi_\sigma - \sigma_x u_x \xi_u - \sigma_x v_x \xi_v\} v + \\ + \beta v_x + \{\gamma_x + \rho_x \gamma_\rho + \sigma_x \gamma_\sigma + u_x \gamma_u + v_x \gamma_v + (v v_x + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho \bar{\rho}^{-1} w(u_x - v_x)) [\tau_x + \\ + \rho_x \tau_\rho + \sigma_x \tau_\sigma + u_x \tau_u + v_x \tau_v] - v_x \xi_x - v_x \rho_x \xi_\rho - v_x \sigma_x \xi_\sigma - u_x v_x \xi_u - v_x^2 \xi_v\} \sigma = 0 \tag{15} \end{aligned}$$

Обозначим левые части уравнений (14), (15) через Q_1 и Q_2 соответственно. Они являются неоднородными квадратичными формами от свободных переменных $\rho_x, \sigma_x, u_x, v_x$. Выполним расщепление условий инвариантности, т.е. приравняем нулю коэффициенты при переменных $\rho_x, \sigma_x, u_x, v_x$ и получим систему уравнений. Предположим, что $P_{\bar{\rho}} \neq 0$, тогда получим, последовательно используя равенство нулю коэффициентов при степенях σ_x^2 в Q_1 , $v_x \sigma_x$ в Q_1 , ρ_x^2 в Q_2 , $u_x \rho_x$ в Q_2 , $\rho_x v_x$ в Q_2 , v_x^2 в Q_2 , $u_x v_x$ в Q_2 , $\rho_x v_x$ в Q_1 , что $\tau = \tau(t, x)$, $\xi = \xi(t, x)$. Оставшиеся из полученных нетривиальные уравнения:

$$\alpha_t + \alpha_x u + \delta_x \rho = 0 \tag{16}$$

$$\delta + u \tau_t - \xi_t + u^2 \tau_x - \xi_x u + \delta_x \rho - \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\alpha_u + \alpha_v - \tau_x \rho) = 0 \tag{17}$$

$$\alpha_\sigma w + \delta_\sigma \rho - \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}}(\alpha_u + \alpha_v - \tau_x \rho) = 0 \tag{18}$$

$$\alpha - \rho \alpha_\rho - \sigma \bar{\rho}^{-1} w \alpha_u + \rho \bar{\rho}^{-1} w \alpha_v + \rho \tau_t + 2 \rho \tau_x u + \delta_u \rho + \sigma \bar{\rho}^{-1} w \tau_x \rho - \xi_x \rho = 0 \tag{19}$$

$$-\sigma \alpha_\sigma + \sigma \bar{\rho}^{-1} w \alpha_u - v \alpha_v - \rho \bar{\rho}^{-1} w \alpha_v + \alpha_{v u} - \sigma \bar{\rho}^{-1} w \tau_x \rho + \delta_v \rho = 0 \tag{20}$$

$$\beta_t + \beta_x v + \gamma_x \sigma = 0 \quad (21)$$

$$-u\beta_\rho + \beta_\rho v + \gamma_\rho \sigma - \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\beta_u + \beta_v - \tau_x \sigma) = 0 \quad (22)$$

$$\gamma + v\tau_t - \xi_t + v^2\tau_x - \xi_x v + \gamma_\sigma \sigma - \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\beta_u + \beta_v - \tau_x \sigma) = 0 \quad (23)$$

$$-\rho\beta_\rho - u\beta_u - \sigma\bar{\rho}^{-1}w\beta_u + \rho\bar{\rho}^{-1}w\beta_v + \beta_u v + \gamma_u \sigma - \rho\bar{\rho}^{-1}w\tau_x \sigma = 0 \quad (24)$$

$$\beta - \sigma\beta_\sigma + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\beta_u - \rho\bar{\rho}^{-1}w\beta_v + \sigma\tau_t + \sigma\tau_x v + \gamma_v \sigma + v\tau_x \sigma + \rho\bar{\rho}^{-1}w\tau_x \sigma - \xi_x \sigma = 0 \quad (25)$$

Теперь, учитывая, что $\tau = \tau(t, x)$, $\xi = \xi(t, x)$, подставим формулы продолжения в уравнения (12), (13) и заменим производные $\rho_t, \sigma_t, u_t, v_t$ на соответствующие формулы пространственных производных. Получим:

$$\begin{aligned} & \delta_t - (\rho_x u + u_x \rho)\delta_\rho - (\sigma_x v + v_x \sigma)\delta_\sigma - \\ & -(uu_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\delta_u - \\ & -(vv_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\delta_v + \\ & +(uu_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_t - \\ & -u_x\xi_t + \delta u_x + \{\delta_x + \rho_x\delta_\rho + \sigma_x\delta_\sigma + u_x\delta_u + v_x\delta_v + \\ & +(uu_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_x - \\ & -u_x\xi_x\}u - \bar{\rho}^{-2}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \\ & + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\{\alpha_x + \rho_x\alpha_\rho + \sigma_x\alpha_\sigma + u_x\alpha_u + v_x\alpha_v + (\rho_x u + u_x \rho)\tau_x - \\ & -\rho_x\xi_x + \beta_x + \rho_x\beta_\rho + \sigma_x\beta_\sigma + u_x\beta_u + v_x\beta_v + (\sigma_x v + v_x \sigma)\tau_x - \\ & -\sigma_x\xi_x\} - \bar{\rho}^{-2}\sigma w(u_x - v_x)(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x)\beta + \\ & + \bar{\rho}^{-1}\sigma(u_x - v_x)(\delta - \gamma) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w\{\delta_x + \rho_x\delta_\rho + \sigma_x\delta_\sigma + \\ & + u_x\delta_u + v_x\delta_v + (uu_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \\ & + \sigma\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_x - u_x\xi_x - \gamma_x - \rho_x\gamma_\rho - \sigma_x\gamma_\sigma - \\ & -u_x\gamma_u - v_x\gamma_v - (vv_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_x + v_x\xi_x\} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_t - (\rho_x u + u_x \rho)\gamma_\rho - (\sigma_x v + v_x \sigma)\gamma_\sigma - \\ & -(uu_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\gamma_u - \\ & -(vv_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\gamma_v + \\ & +(vv_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_t - \\ & -v_x\xi_t + \gamma v_x + \{\gamma_x + \rho_x\gamma_\rho + \sigma_x\gamma_\sigma + u_x\gamma_u + v_x\gamma_v + \\ & +(vv_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_x - \\ & -v_x\xi_x\}v - \bar{\rho}^{-2}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \\ & + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x)(\alpha + \beta) + \\ & + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\{\alpha_x + \rho_x\alpha_\rho + \sigma_x\alpha_\sigma + u_x\alpha_u + v_x\alpha_v + (\rho_x u + u_x \rho)\tau_x - \\ & -\rho_x\xi_x + \beta_x + \rho_x\beta_\rho + \sigma_x\beta_\sigma + u_x\beta_u + v_x\beta_v + (\sigma_x v + v_x \sigma)\tau_x - \\ & -\sigma_x\xi_x\} + \bar{\rho}^{-2}\rho w(u_x - v_x)(\alpha + \beta) - \bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x)\alpha - \\ & -\bar{\rho}^{-1}\rho(u_x - v_x)(\delta - \gamma) - \bar{\rho}^{-1}\rho w\{\delta_x + \rho_x\delta_\rho + \sigma_x\delta_\sigma + \\ & + u_x\delta_u + v_x\delta_v + (uu_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_x - \\ & -u_x\xi_x - \gamma_x - \rho_x\gamma_\rho - \sigma_x\gamma_\sigma - u_x\gamma_u - v_x\gamma_v - \\ & -(vv_x + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) - \rho\bar{\rho}^{-1}w(u_x - v_x))\tau_x + v_x\xi_x\} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Приравняв к нулю коэффициенты при переменных $\rho_x, \sigma_x, u_x, v_x$, получим уравнения:

$$\delta_t + \delta_x u + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\alpha_x + \beta_x) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w(\delta_x - \gamma_x) = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\tau_t - \delta_u - \delta_v - \xi_x + 2\tau_x u - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + (\alpha_\rho + \beta_\rho)) + \\ & + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w(\delta_\rho - \gamma_\rho) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\tau_t - \delta_u - \delta_v - \xi_x + \tau_x(u + v) - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + (\alpha_\sigma + \beta_\sigma)) + \\ & + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w(\delta_\sigma - \gamma_\sigma) + \delta_\sigma w = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\alpha_u + \beta_u + \rho\tau_x) - \rho\delta_\rho + \rho\bar{\rho}^{-1}w\delta_v + u\tau_t + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_t - \\ & -\xi_t + \delta + u^2\tau_x + 2\sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_x u - \xi_x u + w^2\tau_x\bar{\rho}^{-1}\sigma - \bar{\rho}^{-2}\sigma w(\alpha + \beta) + \\ & + \bar{\rho}^{-1}w\beta + \bar{\rho}^{-1}\sigma(\delta - \gamma) - \gamma_u\bar{\rho}^{-1}\sigma w - \xi_x\bar{\rho}^{-1}\sigma w = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}(\alpha_v + \beta_v + \sigma\tau_x) - \sigma\delta_\sigma + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\delta_u - \rho\bar{\rho}^{-1}w\delta_v - \\ & -\sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_t + \delta_v w - \sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_x u + \bar{\rho}^{-2}\sigma w(\alpha + \beta) - w^2\tau_x\bar{\rho}^{-1}\sigma + \end{aligned}$$

$$+\xi_x \bar{\rho}^{-1} \sigma w - \bar{\rho}^{-1} w \beta - \bar{\rho}^{-1} \sigma (\delta - \gamma) + \bar{\rho}^{-1} \sigma w (\delta_v - \gamma_v) - v \tau_x \bar{\rho}^{-1} \sigma w = 0 \quad (32)$$

$$\gamma_t + \gamma_x v + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}} (\alpha_x + \beta_x) - \bar{\rho}^{-1} \rho w (\delta_x - \gamma_x) = 0 \quad (33)$$

$$\bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}} (\tau_t - \gamma_u - \gamma_v - \xi_x + \tau_x (v + u) - \bar{\rho}^{-1} (\alpha + \beta) + (\alpha_{\rho} + \beta_{\rho})) + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}\bar{\rho}} (\alpha + \beta) - w \gamma_{\rho} - \bar{\rho}^{-1} \rho w (\delta_{\rho} - \gamma_{\rho}) = 0 \quad (34)$$

$$\bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}} (\tau_t - \gamma_u - \gamma_v - \xi_x + 2\tau_x v - \bar{\rho}^{-1} (\alpha + \beta) + (\alpha_{\sigma} + \beta_{\sigma})) + \bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}\bar{\rho}} (\alpha + \beta) - \bar{\rho}^{-1} \rho w (\delta_{\sigma} - \gamma_{\sigma}) = 0 \quad (35)$$

$$\bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}} (\alpha_u + \beta_u + \rho \tau_x) - \rho \gamma_{\rho} - w \gamma_u - \sigma \bar{\rho}^{-1} w \gamma_u + \rho \bar{\rho}^{-1} w \gamma_v - \rho \bar{\rho}^{-1} w \tau_t - \rho \bar{\rho}^{-1} w \tau_x v + \bar{\rho}^{-2} \rho w (\alpha + \beta) - \bar{\rho}^{-1} w \alpha - \bar{\rho}^{-1} \rho (\delta - \gamma) - \bar{\rho}^{-1} \rho w (\delta_u - \gamma_u) - u \tau_x \bar{\rho}^{-1} \rho w - w^2 \tau_x \bar{\rho}^{-1} \rho + \xi_x \bar{\rho}^{-1} \rho w = 0 \quad (36)$$

$$\bar{\rho}^{-1} P_{\bar{\rho}} (\alpha_v + \beta_v + \sigma \tau_x) - \sigma \gamma_{\sigma} + \sigma \bar{\rho}^{-1} w \gamma_u - \rho \bar{\rho}^{-1} w \gamma_v + v \tau_t + \rho \bar{\rho}^{-1} w \tau_t - \xi_t + \gamma + v^2 \tau_x + \rho \bar{\rho}^{-1} w \tau_x v - \xi_x v - \bar{\rho}^{-2} \rho w (\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1} w \alpha + \bar{\rho}^{-1} \rho (\delta - \gamma) + w^2 \tau_x \bar{\rho}^{-1} \rho - \xi_x \bar{\rho}^{-1} \rho w - \bar{\rho}^{-1} \rho w (\delta_v - \gamma_v) + v \tau_x \bar{\rho}^{-1} \rho w = 0 \quad (37)$$

Будем считать функцию P и ее производные дополнительными свободными переменными. Тогда из равенства нулю коэффициентов при вторых производных функции P уравнения (29), при условии $u \neq v$, следует, что $\alpha = -\beta$ и $\delta = \gamma$. Вычитание из уравнения (29) уравнение (30) приведет к равенствам $\tau_x = 0$, $\delta_{\sigma} = 0$. Из уравнения (34) следует, что $\gamma_{\rho} = 0$. Вычитая уравнение (33) из уравнения (28) приходим к равенствам $\delta_x = 0$, $\delta_t = 0$. Разность сумм уравнений (31), (32) и (36), (37) равна

$$\tau_t - \xi_x + \delta_v + \delta_u = 0 \quad (38)$$

Из уравнения (29) следует следующее уравнение

$$\tau_t - \xi_x - \delta_v - \delta_u = 0 \quad (39)$$

Следовательно, уравнения (38) и (39) приводят к равенствам $\tau_t = \xi_x$ и $\delta_v = -\delta_u$. Тогда из уравнения (32) следует, что $\beta = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Из уравнения (19) получим равенство $\delta_u = 0$, что влечет за собой $\delta_v = 0$. Таким образом, $\delta = \gamma = const$. Из уравнения (17) следует, что $\xi_t = \delta$. В итоге

$$\tau_t = \xi_x \quad (40)$$

$$\xi_t = \delta = \gamma = const. \quad (41)$$

В силу (40) $\xi_{xx} = 0$, $\xi = \tau_t x + A(t)$. Подставим это в (41) и получим уравнение $\tau_{tt} x + A_t(t) = D = const$. Следовательно, $\tau(t) = Bt + C$, $\xi = Bx + Dt + E$. Выбирая одну из постоянных B, C, D, E равной единице, а остальные равными нулю, получим базис ядра основной алгебры Ли системы (1) – (4), образуемый операторами

$$X_1 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, X_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Частично инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции $P = P(\rho)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантом Министерства Инновационного развития Республики Узбекистан (номер гранта ОТ-Атех-2018-340).

Список литературы:

1. Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons // Phys. Rev. Lett. 1971, V.27, pp. 1192-1194.
2. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
3. Rogers C., Shadwick W.F. Backlund Transformations and Their Applications (Academic Press, New York, 1982).
4. Matveev V.A., Salle M.A. Darboux Transformations and Solitons (Springer, Berlin, 1991).
5. Cariello F., Tabor M. Similarity reductions from extended Painleve expansions for nonintegrable evolution equations // Physics D, 1991, v. 53, pp. 59-70.
6. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978.

7. Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and Differential Equations (Springer, New York, 1989).
8. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations (Springer, New York, 1993).
9. Bluman G.W., Anco S. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations (Springer, New York, 2002).
10. Лагно, С.В. Спичак, В.И. Стогний. М. Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
11. Головин С.В., Чесноков А.А. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Новосибирск, 2009.
12. Bluman G.W., Cheviakov A., Anco S. Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations (Springer, New York, 2010).
13. Wang M.L., Zhou Y.B., Li Z.B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of

nonlinear equations in mathematical physics // Phys. Lett. A, 1996, v. 216, pp. 67-75.

14. He J.H. Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: Some examples // Int. J. Nonlinear Mech., 1999, v. 34, pp. 699-708.

15. He J.H. Semi-inverse method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aerodynamics // Int. J. Turbo Jet-Engines, 1997, v. 14, no. 1, pp. 23-28.

16. Панов А.В. Групповая классификация системы уравнений механики двухфазной среды //

Вестн. Челяб. гос. ун-та. 2011. № 26. Математика. Механика. Информатика. Вып. 13. С. 39-48.

17. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, № 9, с. 56-64.

18. Kholmurodov A, Dilmuradov.N. Additional Conservation Laws for Two-Velocity Hydrodynamics Equations with the Same Pressure in Components// Research Inventy: International Journal of Engineering And Science Vol.7, Issue 1 (January 2017), PP -39-45, ISSN (e): 2278-4721, ISSN (p):2319-6483.

#4 (44), 2019 część 4
Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe
(Warszawa, Polska)
Czasopismo jest zarejestrowane i publikowane w Polsce. W czasopiśmie publikowane są artykuły ze wszystkich dziedzin naukowych. Czasopismo publikowane jest w języku polskim, angielskim, niemieckim i rosyjskim.

Artykuły przyjmowane są do dnia 30 każdego miesiąca.

Częstotliwość: 12 wydań rocznie.

Format - A4, kolorowy druk

Wszystkie artykuły są recenzowane

Każdy autor otrzymuje jeden bezpłatny egzemplarz czasopisma.

Bezpłatny dostęp do wersji elektronicznej czasopisma.

Zespół redakcyjny

Redaktor naczelny - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

Rada naukowa

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

Dawid Kowalik (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Peter Clarkwood (University College London)

#4 (44), 2019 part 4
East European Scientific Journal
(Warsaw, Poland)
The journal is registered and published in Poland. The journal is registered and published in Poland. Articles in all spheres of sciences are published in the journal. Journal is published in **English, German, Polish and Russian.**

Articles are accepted till the 30th day of each month.

Periodicity: 12 issues per year.

Format - A4, color printing

All articles are reviewed

Each author receives one free printed copy of the journal

Free access to the electronic version of journal

Editorial

Editor in chief - Adam Barczuk

Mikołaj Wiśniewski

Szymon Andrzejewski

Dominik Makowski

Paweł Lewandowski

The scientific council

Adam Nowicki (Uniwersytet Warszawski)

Michał Adamczyk (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Peter Cohan (Princeton University)

Mateusz Jabłoński (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Piotr Michalak (Uniwersytet Warszawski)

Jerzy Czarnecki (Uniwersytet Jagielloński)

Kolub Frennen (University of Tübingen)

Bartosz Wysocki (Instytut Stosunków Międzynarodowych)

Patrick O'Connell (Paris IV Sorbonne)

Maciej Kaczmarczyk (Uniwersytet Warszawski)

Dawid Kowalik (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)

Peter Clarkwood (University College London)

Igor Dzedzic (Polska Akademia Nauk)
Alexander Klimek (Polska Akademia Nauk)
Alexander Rogowski (Uniwersytet Jagielloński)
Kehan Schreiner(Hebrew University)
Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
Mikołaj Żukowski (Uniwersytet Warszawski)
Mateusz Marszałek (Uniwersytet Jagielloński)
Szymon Matysiak (Polska Akademia Nauk)
Michał Niewiadomski (Instytut Stosunków Międzynarodowych)
Redaktor naczelny - Adam Barczuk

1000 kopii.

Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warszawa, Polska»

Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe

Aleje Jerozolimskie 85/21, 02-001
Warszawa, Polska

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com/>

Igor Dzedzic (Polska Akademia Nauk)
Alexander Klimek (Polska Akademia Nauk)
Alexander Rogowski (Uniwersytet Jagielloński)
Kehan Schreiner(Hebrew University)
Bartosz Mazurkiewicz (Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki)
Anthony Maverick(Bar-Ilan University)
Mikołaj Żukowski (Uniwersytet Warszawski)
Mateusz Marszałek (Uniwersytet Jagielloński)
Szymon Matysiak (Polska Akademia Nauk)
Michał Niewiadomski (Instytut Stosunków Międzynarodowych)
Editor in chief - Adam Barczuk

1000 copies.

Printed in the "Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warsaw, Poland»

East European Scientific Journal

Jerozolimskie 85/21, 02-001 Warsaw, Poland

E-mail: info@eesa-journal.com ,

<http://eesa-journal.com>